Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Septiembre 2019 Opción A

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & +2z & =0 \\ (m+2)x & +y & -z & =m \\ 3x & +(m+2)y & +z & =m \end{array}\right.$$

a) [1.5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

Sea C la matriz de coeficientes del sistema y A la matriz ampliada, estudiamos sus rangos por determinantes y menores para discutir el sistema.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix}=\Big(1+2(m+2)^2-3\Big)-\Big(6-(m+2)+(m+2)\Big)=2m^2+8m=2m(m+4)$$

$|C|=0 \quad \rightarrow \quad 2m(m+4)=0 \quad \rightarrow \quad m=0 \quad m=-4$

Si $m\neq 0$ y $m\neq -4$, $Rg(C)=3$ y por tanto $Rg(A)=3$ y el sistema es compatible determinado.

Con $m=0$ es sistema es homogeneo y puesto que $Rg(C)<3$, el sistema es compatible indeterminado.

Nota: Recordemos. Con $m=0$ la columna de terminos independientes serán todos ceros y por tanto es homogeneo.

Estudiamos el caso con $m=-4$. La matriz de coeficientes es:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que el determinante de C es nulo. Por otra parte el menor formado por c_{11}, c_{12}, c_{21} y c_{22},

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-2)\neq 0$. Por tanto $Rg(C)=2$ y $Rg(A)\geq 2$.

Para calcular el rango de A, eliminamos su tercera columna y calculamos el determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}=(-4+0-12)-(0+8+8)\neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg(A)=3$$

Por tanto, con $m=-4$, $Rg(C)=2\neq Rg(A)=3 \quad \rightarrow \quad$ sistema incompatible.

b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$

Ya hemos visto que con $m = 0$ el sistema es homogeneo compatible indeterminado. Resolvemos por Gauss usando las dos primeras ecuaciones y con $z = \lambda$ como parámetro.

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +2z & = 0 \\ 2x & +y & -z & = 0 \end{array}\right. \overset{z=\lambda}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{lll} x & +y & = -2\lambda \\ 2x & +y & = +\lambda \end{array}\right. \overset{Ec_2=Ec_2-2Ec_1}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{lll} x & +y & = -2\lambda \\ & -y & = +5\lambda \end{array}\right. \rightarrow$$

$$y = -5\lambda \qquad x = -2\lambda - (-5\lambda) = 3\lambda$$

$$\text{Solución: } x = 3\lambda \quad y = -5\lambda \quad z = \lambda$$

Septiembre 2019 Opción B
[2.5 puntos] Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Sea x el ángulo menor, y el mediano y z el mayor y teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es de 180 grados, del enunciado podemos concluir:

$$x + y + z = 180 \qquad x = \frac{z}{2} \qquad x + z = 2y$$

Escribimos estos datos en forma de sistema y resolvemos por Gauss:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 180 \\ 2x & & -z & = 0 \\ x & -2y & +z & = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{F_3=F_3+2F_1} \left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 180 \\ 2x & & -z & = 0 \\ 3x & & +3z & = 360 \end{array}\right. \xrightarrow{F_3=F_3+3F_2}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 180 \\ 2x & & -z & = 0 \\ 9x & & & = 360 \end{array}\right. \rightarrow \quad x = \frac{360}{9} = 40 \quad z = 2x = 80 \quad y = 180 - x - z = 60$$

Solución: 40º, 60º y 80º

Junio 2019 Opción A

[**2.5 puntos**] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: Necesitamos crear y resolver ecuaciones para nuestras cuatro incognitas, a, b, c y d. La primera ecuación nos la da el mismo enunciado.

$$a + d = 1$$

Nota: Las siguientes ecuaciones se obtienen desarrollando la expresión $AX = XA$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

$$AX = XA \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} -c & = & b & \Rightarrow & b = -c \\ -d & = & -a & \Rightarrow & a = d \\ a & = & d & \Rightarrow & a = d \\ b & = & -c & \Rightarrow & b = -c \end{array}$$

Estas cuatro ecuaciones se resumen en 2. $\quad a = d; \quad b = -c.$

Nota: Obtenemos la última ecuación desarrollando el determinante.

$$|X| = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad ad - bc = 1$$

Esta última ecuación no es lineal y por tanto no podemos usar las técnicas matriciales conocidas para su análisis. Lo resolvemos con las ecuaciones obtenidas.

$a + d = 1$ junto con $a = d$ nos lleva a $a + a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow d = \frac{1}{2}$

$b = -c$ junto con $ad - bc = 1$, al conocer ya el valor de a y d nos lleva a $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - (-c)c = 1$

$\frac{1}{4} + c^2 = 1 \rightarrow c^2 = 1 - \frac{1}{4} \rightarrow c^2 = \frac{3}{4} \rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por tanto hay 2 soluciones a la matriz X:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Junio 2019 Opción B

[2.5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Desarrollamos la expresión $X^tA = B^t$.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{rrrcc} (2-m)x & +y & +mz & = & 2m^2-1 \\ x & +my & +z & = & m \\ (2m-1)x & +y & +z & = & 1 \end{array} \right. \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Hemos escrito la ecuación matricial en forma de sistema de ecuaciones y después reescrito el sistema de nuevo en forma matricial pero en la forma que habitualmente lo conocemos para analizarlo mediante el teorema de Rouché-Fröbenius.

El sistema es equivalente a $A^tX = B$ y podemos discutirlo mediante el teorema de Rouché-Fröbenius. Llamemos M a la matriz de coeficientes del sistema, ($M = A^t$), y M^* a la matriz M ampliada con los términos independientes del sistema.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2m - m^2 + m + 2m - 1) - (2m^3 - m^2 + 2 - m + 1)$$

$$|M| = -2m^3 + 6m - 4 = -2(m^3 - 3m + 2)$$

El rango será 3 cuando el determinante no sea nulo. Resolvemos mediante Ruffini.

$$|M| = 0 \quad \rightarrow \quad -2(m^3-3m+2) = 0 \quad \rightarrow \quad (m-1)^2(m+2) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, $R(M) = 3 = R(M^*)$. Sistema compatible determinado.

Analizamos para $m = 1$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con $m = 1$, al ser todas la filas iguales, $R(M) = R(M^*) = 1$ por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Analizamos para $m = -2$.

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{1} & -2 \\ \boxed{1} & \boxed{-2} & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya sabemos que $R(M) < 3$. Puesto que el determinante del menor en verde no es cero, el rango de M es 2.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad R(M) = 2$$

Eliminamos la tercera columna en M^* para ver su rango.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-8 + 7 + 10) - (70 - 8 + 1) = -54 \neq 0$$

Por tanto, con $m = -2$ $R(M^*) = 3 \neq R(M)$ y el sistema es incompatible.

Septiembre 2018 Opción A
[**2.5 puntos**] Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [**0.75 puntos**] Determina, si existen, los valores de a, b y c para los que las matrices A y B conmutan.

Nota: Calculamos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ y creamos ecuaciones para que conmuten.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad b = 0 \quad -b = 0 \quad c = -1$$

Solución: $\quad a = 0 \quad b = 0 \quad c = -1.$

b) [1 punto] Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_3 \cdot A = A \quad \rightarrow \quad A^{\text{par}} = I_3 \qquad A^{\text{impar}} = A$$

$$A^{2017} = A^{\text{impar}} = A$$

$$A^{2018} = A^{\text{par}} = I_3$$

c) [0.75 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (-1+0+0) = 1$$

Determinante no nulo, por tanto matriz regular o inversible. Si tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto concuerda con lo visto en el apartado **b)**, si $A^2 = A \cdot A = I$ y $I = A^{-1} \cdot A \quad \rightarrow \quad A^{-1} = A$

Nota: Este último comentario no es obligatorio, aunque demuestra algo coherente con el apartado anterior y por tanto es correcto ponerlo aquí.

Septiembre 2018 Opción B
Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x & +y & +mz & = m^2 \\ & y & -z & = m \\ x & +my & +z & = m \end{cases}$$

a) [1.5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

Sea C la matríz de coeficientes del sistema y A la matriz ampliada, las determinaos y analizamos sus rangos.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad |C| = (1+0-1)-(m-m+0) = 0 \quad \rightarrow \quad Rg(C) < 3$$

Nos fijamos ahora en el menor indicado en la matriz. $C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} m \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & m \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg(C) \geq 2.$

Por tanto $Rg(C) = 2$ y el sistema nunca es compatible determinado independientemente del valor de m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}$$

Puesto que en C las columnas 1 y 2 nos daban un menor no nulo, eliminamos la columna 3 en A y analizamos rangos para discutir el sistema.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = (m+0+m)-(m^2+m^2+0) = 2m-2m^2 = 2m(1-m)$$

Por tanto, $Rg(A) = 3$ para $m \neq 0$ y $m \neq 1$. En estos casos, como $Rg(C) = 2$ es diferente de $Rg(A) = 3$, el sistema es incompatible.

Para $m = 0$ y $m = 1$, $Rg(A) = Rg(C) = 2 <$ número de incognitas y el sistema es compatible indeterminado.

c) [1 punto] Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

Sabemos que el sistema es compatible indeterminado que depende de un parámetro, (incognitas - rango)$= 3 - 2 = 1$.

Puesto que tenemos un menor no nulo formado por primera y segunda columna de la primera y segunda ecuaciones, determinamos a z como parámetro: $z = \lambda$ y descartamos la tercera ecuación. Con $m = 1$, el sistema se nos convierte en:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 1 \\ & y & -z & = 1 \end{array} \right. \qquad z = \lambda \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rrl} x & +y & = 1 - \lambda \\ & y & = 1 + \lambda \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad x = 1 - \lambda - (1 + \lambda) = -2\lambda$$

$$\text{Solución:} \quad x = -2\lambda \quad y = 1 + \lambda \quad z = \lambda.$$

Si $z = 2 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2$. Por tanto: $x = -4, \quad y = 3, \quad z = 2$.

Junio 2018 Opción A
Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrcc} x & +2y & +(m+3)z & = & 3 \\ x & +y & z & = & 3m \\ 2x & +4y & 3(m+1)z & = & 8 \end{array} \right.$$

a) [1.75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro m.

Sea C la matriz de coeficentes del sistema y A la matriz ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & (m+3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & (m+3) & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{pmatrix}$$

Determinamos rangos mediante determinantes y menores.

$Rg(C) \geq 2$ puesto que dado el menor formado por $F1, F2, C1, C2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \neq 0$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (m+3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{vmatrix} = 3(m+1) + 4(m+3) + 4 - 2(m+3) - 6(m+1) - 4 = 3 - m$$

Por tanto el $Rg(C) = 3$ siempre que $m \neq 3$. El $Rg(A)$ también será 3 y por tanto con $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado.

Con $m = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $Rg(A) \geq 2$ por el menor formado por las filas y columnas 1 y 2. Sustituimos la tercera columna por la columna de terminos independientes y calculamos el determinante para ver el rango.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = (8+12+36)-(6+36+16) = -2 \neq 0$$

Con $m = 3$, $Rg(C) = 2$ y $Rg(A) = 3$, por tanto el sistema es incompatible.

b) [0,75 puntos] Resuelve el sistema para $m = -2$

Resolvemos por Gauss sustituyendo $m = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\binom{F_2=F_2-F_1}{F_3=F_3-2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Del sistema equivalente podemos deducir que $-5z = 2 \quad \rightarrow \quad z = -\frac{2}{5}$. $\qquad -y = -9 \quad \rightarrow \quad y = 9$.

$x = 3 - 2y - z = 3 - 2 \cdot 9 - (-\frac{2}{5}) = -\frac{73}{5}$

$$\text{Solución: } x = -\frac{73}{5} \qquad y = 9 \qquad z = -\frac{2}{5}$$

Junio 2018 Opción B

a) [1.5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de $34,50$ euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
- se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
- tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

Sea x el número de monedas de 50 céntimos, y el número de monedas de 1 euro y z el número de monedas de 2 euros, planteamos el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

$$\begin{array}{l} 0,5x + y + 2z = 34,5 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + z \end{array} \overset{Ec_1 = 2 \cdot Ec_1}{\equiv} \begin{array}{rrrcr} x & +2y & +4z & = & 69 \\ x & +y & +z & = & 30 \\ -x & +y & -z & = & 0 \end{array}$$

Sea C la matriz de coeficientes del sistema y A la matriz ampliada, determinamos rangos mediante determinantes y menores. para discutir el sistema.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Rg(C) \geq 2$ puesto que dado el menor formado por $F1, F2, C1, C2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \neq 0$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + 4 + 2) - (-4 + 1 - 2) = 10 \neq 0$$

Por tanto el $Rg(C) = 3$. El $Rg(A)$ también será 3 y por tanto el sistema es compatible determinado y en principio tiene solución. Hay que comprobar que esa solución sea entera resolviendo el sistema, lo cual haremos aplicando el método de Gauss a la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 0 & -1 & -3 & -39 \\ 0 & 3 & 3 & 69 \end{pmatrix} \overset{F_3 + 3F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 0 & -1 & -3 & -39 \\ 0 & 0 & -6 & -48 \end{pmatrix}$$

$$-6z = -48 \quad \rightarrow \quad z = 8 \qquad -y - 3z = -39 \quad \rightarrow \quad y = 15 \qquad x + 2y + 4z = 69 \quad \rightarrow \quad x = 7$$

El problema tiene una única solución con 8 monedas de 2 euros, 15 de 1 euro y 7 de 50 céntimos.

b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

El nuevo sistema y sus matrices asociadas serán:

$$\begin{array}{l} 0,5x + y + 2z = 35 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + z \end{array} \quad \overset{Ec_1 = 2 \cdot Ec_1}{\equiv} \quad \begin{array}{rrrcr} x & +2y & +4z & = & 70 \\ x & +y & +z & = & 30 \\ -x & +y & -z & = & 0 \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes no ha cambiado y su rango sigue siendo 3. El rango de la matriz ampliada no puede ser mayor a 3, por tanto: $Rg(C) = Rg(A) = 3 \quad \rightarrow \quad SCD$ y el sistema tiene solución única.

Buscamos la solución nuevamente por el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 3 & 3 & 70 \end{pmatrix} \overset{F_3 + 3F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 0 & -6 & -50 \end{pmatrix}$$

$$-6z = -50 \quad \rightarrow \quad z = \frac{25}{3} \qquad -y - 3z = -40 \quad \rightarrow \quad y = 15 \qquad x + 2y + 4z = 70 \quad \rightarrow \quad x = \frac{20}{3}$$

Puesto que los resultados no son enteros y no podemos tener fracciones de monedas no podemos efectuar el pago de los 35 euros bajo estas condiciones.

Septiembre 2017 Opción A
Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ \text{ y } B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

a) [1.25 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

Denominemos M a la matriz de coeficientes del sistema junto con la matriz columna B. Calculamos rangos mediante determinantes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = (0+6+3) - (0+9+2(m-2)) = 4-2m$$

$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad 4-2m = 0 \quad \rightarrow \quad m = 2$

Si $m \neq 2, Rg(A) = 3$ y $Rg(M) = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Estudiamos el caso para $m = 2$. Dado que el menor formado por $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 \neq 0$, para el rango de la matríz ampliada sustituimos la tercera columna de A por B sustituyendo m por 2 y calculamos su determinante.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (0+12+5) - (0+15+2) = 0$$

Por tanto con $m = 2,\ Rg(A) = 2,\ Rg(M) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

b) [1.25 puntos] Para $m = 2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

Como hemos visto, con $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

Eliminamos la tercera ecuación y determinamos $z = \lambda$ como parámetro del sistema. Escalonamos y resolvemos.

$$\begin{cases} x+y+z = 2 \\ 2x+3z = 5 \end{cases} \overset{z=\lambda}{\rightarrow} \begin{cases} x+y & = 2-\lambda \\ 2x & = 5-3\lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = \frac{5-3\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\lambda-1}{2}$$

$\lambda = 17 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{5-3\cdot 17}{2} = -23 \qquad y = \dfrac{17-1}{2} = 8$

$$\text{Solución:} \quad x = -23 \quad y = 8 \quad z = 17.$$

Septiembre 2017 Opción B

Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

a) [1.5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = k^2(k+1) + k(k+1)^2 = k(k+1)[k+(k+1)] = k(k+1)(2k+1)$$

$|A| = 0 \quad \to \quad k = 0;\ k = -1;\ k = -\frac{1}{2}$

$Rg(A) = 3$ si $k \neq 0$, $k \neq -1$ y $k \neq -\frac{1}{2}$.

Para $k = 0,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El menor formado por $a_{21},\ a_{22},\ a_{31},\ a_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, y por tanto para $k = 0,\ Rg(A) = 2$.

Para $k = -1,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El menor formado por $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, y por tanto para $k = -1,\ Rg(A) = 2$.

Para $k = -\frac{1}{2},\ A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

El menor formado por $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0$, y por tanto para $k = 0,\ Rg(A) = 2$.

b) [1 punto] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2(A^tA^{-1})^{2017}$ siendo A^t las traspuesta de A.

$|A| = k(k+1)(2k+1)$. Si $k = 1,\ |A| = 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 6$

Nota: También se puede hacer: Con $k = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = (2+4) - (0) = 6.$

$|A^t| = |A| = 6 \qquad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{6}$

$$\left|2(A^tA^{-1})^{2017}\right| = 2^3 \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{6}\right)^{2017} = 8$$

Junio 2017 Opción A

Considera $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

La matríz no tiene inversa cuando su determinante es cero.

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \Big((-2+\lambda)^2(1+\lambda) - 4(-2+\lambda)\Big) =$$

$$|A + \lambda I| = (\lambda - 2)\left[(\lambda-2)(\lambda+1) - 4\right] = (\lambda-2)(\lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 2 - 4) = (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$|A + \lambda I| = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3) \qquad |A + \lambda I| = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2; \quad \lambda = -2; \quad \lambda = 3$$

Solución: la matriz tiene inversa siempre que $\lambda \neq 2,\ \lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 3$

b) [1,5 puntos] Resuelve $AX = -3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

$$AX = -3X \quad \equiv \quad \begin{array}{rrl} -2x & -2y & = -3x \\ -2x & +y & = -3y \\ & -2z & = -3z \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{rrl} x & -2y & = 0 \\ -2x & +4y & = 0 \\ & z & = 0 \end{array}$$

El sistema es homogeneo y por tanto tiene solución, (aun no sabemos si única o infinitas). Del sistema vemos que $z = 0$. Aplicamos Gauss a las 2 primeras ecuaciones.

$$\begin{array}{rrl} x & -2y & = 0 \\ -2x & +4y & = 0 \end{array} \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{array}{rrl} x & -2y & = 0 \\ \cancel{0x} & \cancel{+0y} & = \emptyset \end{array} \quad \rightarrow \quad x = 2y$$

Por tanto el sistema es compatible indeterminado con solución: $(2\mu, \mu, 0)$.

Si $x = 1$, entonces $2\mu = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. Por tanto la solución es $x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = 0$.

Junio 2017 Opción B
Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

Sea x el precio de un lápiz, y el de un rotulador y z el de una carpeta.

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ 2x & +4y & +z & = & 20 \\ x & +7y & & = & 25 \end{array}$$

Discutimos el sistema para saber si tiene soluciónes. Llamemos C a la matriz de coeficientes del sistema y $|A|$ a la matriz ampliada. Calculamos el rango por determinantes.

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (0+28+1)-(8+21+0) = 0 \quad Rg(C) < 3$$

Dado que el menor formado por a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg(C) = 2.$

Sustituimos la tercera columna por la columna de términos independientes y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 2 & 4 & 20 \\ 1 & 7 & 25 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 5\Big((60+42+4)-(12+84+10)\Big) = 0 \quad Rg(A) < 3$$

Puesto que el $Rg(C) = 2$ y el $Rg(A) \not< Rg(C)$, el $Rg(A) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado. No podemos deducir el precio de cada artículo pues no hay una solución única.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

La nueva ecuación es: $z = 10x$. El nuevo sistema es:

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ 2x & +4y & +z & = & 20 \\ 10x & & -z & = & 0 \end{array}$$

Resolvemos por Gauss.

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ 2x & +4y & +z & = & 20 \\ 10x & & -z & = & 0 \end{array} \xrightarrow[F_3=F_3-5F_2]{F_2=3F_2-2F_1} \begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ & +10y & -z & = & 30 \\ & -20y & -6z & = & -100 \end{array} \xrightarrow{F_3=F_3+2F_2}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ & +10y & -z & = & 30 \\ & & -8z & = & -40 \end{array} \quad \rightarrow \quad z=5 \quad y=\frac{30+5}{10}=3,5 \quad x=\frac{15-3,5-2\cdot 5}{3}=0,5$$

Solución: Lápiz: 0,50€ Rotulador: 3,50€ Carpeta: 5€

Septiembre 2016 Opción A
Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2x & -4y & +2z & =1 \\ 5x & -11y & +9z & =\lambda \\ x & -3y & +5z & =2 \end{array}\right\}$$

a) [1.75 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.

Denominemos C a la matriz de coeficientes del sistema y A a la matriz ampliada, (C junto con la matriz columna de términos independientes). Calculamos rangos mediante determinantes.

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=(-110-30-36)-(-22-54-100)=0 \quad \rightarrow \quad Rg(C)<3$$

Dado que el menor formado por $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}=-22-(-20)\neq 0,\ Rg(C)=2.$

Para estudiar el rango de A, sustituimos la columna C_3 de C por la C_4 de A.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(-44-15-4\lambda)-(-11-40-6\lambda)=2\lambda-8 \qquad 2\lambda-8=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=4$$

$Rg(A)$ no puede ser inferior a $Rg(C)$, por lo que $Rg(A)\geq 2$.

Si $\lambda\neq 4 \quad \rightarrow \quad Rg(A)=3\neq Rg(C)=2 \quad \rightarrow$ El sistema es incompatible.
Si $\lambda=4 \quad \rightarrow \quad Rg(A)=2=Rg(C)=2 \quad \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

b) [0.75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para $\lambda=4$.

Descartamos la tercera ecuación, sustituimos λ y resolvemos, (usaremos t como parámetro).

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -4y & +2z & =1 \\ 5x & -11y & +9z & =4 \end{array}\right. \overset{z=t}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} 2x-4y & =1-2t \\ 5x-11y & =4-9t \end{array}\right. \xrightarrow{Ec_2=5Ec_1-2Ec_2} \left\{\begin{array}{rrl} 2x & -4y & =+1-2t \\ & 2y & =-3+8t \end{array}\right.$$

$$y=\frac{-3+8t}{2} \qquad x=\frac{1-2t+4(\frac{-3+8t}{2})}{2}=\frac{-5+14t}{2}$$

$$\text{Solución:} \quad x=\frac{-5+14t}{2} \qquad y=\frac{-3+8t}{2} \qquad z=t.$$

Septiembre 2016 Opción B

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcula el rango de $AB^T + \lambda I$ según los valores de λ, (B^T es la matriz traspuesta de B, I es la matriz identidad de orden 3).

$$AB^T + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$AB^T + \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante desarrollando tercera fila por menores para ver el rango.

Nota: También podríamos hacerlo por Sarrus y llegaríamos a la misma expresión.

$$|AB^T + \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 + 0 + \lambda \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda+1)(\lambda-1)+1] =$$

$$= \lambda[(\lambda^2-1)+1] = \lambda^3 \qquad \lambda^3 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$$

Si $\lambda \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg(AB^T + \lambda I) = 3$.

Si $\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad AB^T + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Puesto que F_1 y F_2 son proporcionales y F_3 es nula, si $\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad Rg(AB^T + \lambda I) = 1$.

b) [1.5 puntos] Calcula la matriz X que verifica que $CX - X = 2I$

Despejamos X en la ecuación.

$$CX - X = 2I \quad \rightarrow \quad CX - IX = 2I \quad \rightarrow \quad (C-I)X = 2I \quad \rightarrow \quad \cancel{(C-I)^{-1}(C-I)}X = (C-I)^{-1}2I$$

$$X = (C-I)^{-1}2I = 2(C-I)^{-1}$$

$$C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|C-I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (0+0+0)-(0+0+1) = -1$$

$$(C-I)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Adj(C-I)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C-I)^{-1} = \frac{1}{|C-I|} Adj(C-I)^T = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2(C-I)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Junio 2016 Opción A
Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

a) [1'75 puntos] Halla la matriz X que verifica $AX + B = 2A$

$$AX + B = 2A \quad \to \quad AX = 2A - B \quad \to \quad A^{-1}AX = A^{-1}(2A - B) \quad \to \quad X = A^{-1}(2A - B)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 + 0 + 0) - (-2 + 0 + 0) = 1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

b) [0'75 punto] Calcula B^2 y B^{2016}.

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B^{2016} = (B^2)^{1008} = I^{1008} = I$$

$$\text{Solución: } B^{2016} = I$$

Junio 2016 Opción B

Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{rcl}(3\alpha-1)x+2y & = & 5-\alpha \\ \alpha x+y & = & 2 \\ 3\alpha x+3y & = & \alpha+5\end{array}\right.$

a) [1'5 puntos] Discútelo según los valores del parámero α.

Sea C la matriz de coeficientes del sistema y A la matriz ampliada, discutimos rangos mediante determinantes.

$$C=\begin{pmatrix}3\alpha-1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha+5\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha+5\end{vmatrix}=$$

$$=[(3\alpha-1)(\alpha+5)+3\alpha(5-\alpha)+12\alpha]-[3\alpha(5-\alpha)+2\alpha(5+\alpha)+6(3\alpha-1)]=\alpha^2-2\alpha+1$$

$$|A|=0 \quad\to\quad \alpha^2-2\alpha+1=0 \quad\to\quad (\alpha-1)^2=0 \quad\to\quad \alpha=1$$

Puesto que el rango de la matriz de coeficientes C, matriz de dimensión 3×2, es máximo 2, cuando $\alpha\neq 1, Rg(A)=3\neq Rg(C)$ y el sistema es incompatible.

Con $\alpha=1$, el sistema se convierte en $\left\{\begin{array}{rcl}2x+2y & = & 4 \\ x+y & = & 2 \\ 3x+3y & = & 6\end{array}\right.$

Las matrices asociadas a este sistema son $C=\begin{pmatrix}2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$

Puesto que todas las filas son proporcionales, $Rg(C)=Rg(A)=1 \quad\to$ Sistema compatible determinado.

b) [1 punto] Resuélvelo para $\alpha=1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x=4$.

Ya hemos visto que para $\alpha=1$, el sistema se convierte en $\left\{\begin{array}{rcl}2x+2y & = & 4 \\ x+y & = & 2 \\ 3x+3y & = & 6\end{array}\right.$.

Dado que las tres ecuaciones son proporcionales, podemos elimimar por ejemplo primera y tercera ecuación quedandonos con $x+y=2$.

Si $x=\lambda$, $y=2-\lambda$. Solución al sistema: $(\lambda,2-\lambda)$

Con $x=4,\ y=2-4=-2$