Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Septiembre 2019 Opción A
[2.5 puntos] Determina la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 0)$.

Datos: $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \qquad f(1) = 0$

$f(x) = \displaystyle\int f'(x)dx = \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ Integramos por partes.

$u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}dx \qquad dv = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad v = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

$f(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2 \cdot 2\sqrt{x} + k$

$f(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{1}\ln 1 - 4\sqrt{1} + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 4$

Solución: $f(x) = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + 4$

Septiembre 2019 Opción B
Ejercicio 2. Apartado b) [1.25 puntos] Determina $a > 0$ de manera que sea $\dfrac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Puesto que la función no corta al eje x, excepto en $x = 0$, podemos calcular el área integrando entre 0 y a.

$A = \displaystyle\int_0^a xe^{-x^2}dx$

Efectuaremos la integral mediante el método de cambio de variable:

$u = -x^2 \quad \rightarrow \quad du = -2xdx \quad \rightarrow \quad xdx = \dfrac{du}{-2}$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad u = -0^2 = 0; \qquad x = a \quad \rightarrow \quad u = -a^2$

$A = \displaystyle\int_0^a xe^{-x^2}dx = \int_0^{-a^2} e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}[e^u]_0^{-a^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - e^0\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - 1\right)$

$$A = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - 1\right) = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad e^{-a^2} - 1 = -\tfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e^{-a^2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -a^2 = \ln\tfrac{1}{2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad a = \pm\sqrt{\ln 2 - \ln 1} = \pm\sqrt{\ln 2}$$

Puesto que a tiene que ser positivo según el enunciado:

Solución: $a = \sqrt{\ln 2}$

Junio 2019 Opción A

[**2.5 puntos**] Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Datos:

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx \qquad F(1) = 1 \qquad e^x = t$$

$$e^x = t \quad \Rightarrow \quad e^x dx = dt \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{t}$$

$$\frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t)+Bt}{t(1-t)}$$

$$t = 0 \;\Rightarrow\; 1 = A \qquad t = 1 \;\Rightarrow\; 2 = B$$

$$\int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{2}{1-t}dt = \ln t + \frac{2}{-1}\ln|1-t| + k = \ln t - 2\ln|1-t| + k$$

Deshacemos el cambio de variable y con ayuda del punto determinamos k.

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \ln e^x - 2\ln|1-e^x| + k = x - 2\ln|1-e^x| + k$$

$$F(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cancel{1} - 2\ln|1-e^1| + k = \cancel{1} \quad \Rightarrow \quad k = 2\ln|1-e|$$

$$F(x) = x - 2\ln|1-e^x| + 2\ln|1-e|$$

Nota: Aplicando propiedades de los logaritmos esta función queda mejor expresada como $F(x) = x + \ln\left(\dfrac{1-e}{1-e^x}\right)^2$*, aunque el resultado anterior probablemente será dado como válido por el examinador.*

Junio 2019 Opción B

Considera las funciones $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$.

a) [1 punto] Esboza el recinto de la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

La función logaritmo tiene una asíntota vertical cuando $x+2=0$, o sea, en $x=-2$. Calculamos sus cortes con los ejes.

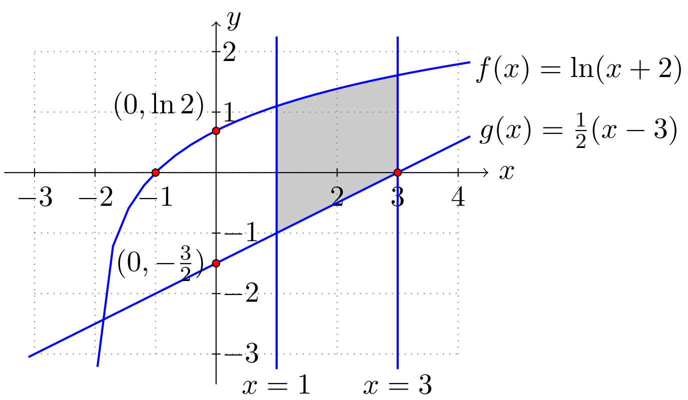
$x=0 \quad \to \quad y=f(0)=\ln 2\approx 0,7$
$f(x)=0 \quad \to \quad 0=\ln(x+2) \quad \to \quad e^0=x+2 \quad \to \quad 1=x+2 \quad \to \quad x=-1$

La función g es lineal. Solo necesitamos 2 puntos para esbozarla.

$g(0)=\frac{1}{2}(0-3)=-\frac{3}{2}$
$g(3)=\frac{1}{2}(3-3)=0$

Nota: Aunque no nos han pedido los puntos de corte con los ejes de f y de g, para un esbozo correcto son necesarios.

Añadimos las rectas $x=1$ y $x=3$ y esbozamos las gráficas. La región está sombreada.



b) [1.5 puntos] Determina el área del recinto anterior.

$$A=\int_1^3 (f(x)-g(x))dx=\int_1^3\left[\ln(x+2)-\frac{1}{2}(x-3)\right]dx$$

Resolvemos por partes la integral del logaritmo.

$$u=\ln(x+2) \quad du=\frac{1}{x+2}dx \qquad dv=dx \quad v=x$$

$$\int \ln(x+2)dx = x\ln(x+2) - \int x\frac{1}{x+2}dx$$

Realizamos aparte esta última integral racional.

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx = x - 2\ln(x+2) + C$$

$$\begin{array}{cc|c} x & & x+2 \\ \cline{3-3} -x & -2 & 1 \\ \cline{1-2} & -2 & \end{array}$$

Por tanto, el área pedida es:

$$A = \int_1^3 \left[\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)\right]dx = \left[x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\right]_1^3 =$$

$$= \left[(x+2)\ln(x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x\right]_1^3 = \left(5\ln 5 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(3\ln 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{5^5}{3^3} - 1 \approx 3,75 \text{ u}^2$$

Septiembre 2018 Opción A
[2.5 puntos] Considera la función f definida por $f(x) = ax\ln x - bx$ para $x > 0$, (ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^2 f(x)dx = 8\ln 2 - 9$$

Datos:

$$f'(1) = 0 \qquad \int_1^2 f(x)dx = 8\ln 2 - 9$$

$$f'(x) = a\ln x + a\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} - b = a\ln x + a - b; \qquad f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad a - b = 0$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 ax\ln x dx - \int_1^2 bxdx$$

La primera integral la efectuamos por partes. La segunda es inmediata.

$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}dx \quad dv = axdx \quad v = \frac{ax^2}{2}$

$$\int_1^2 ax\ln xdx = \left[\frac{ax^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{ax^2}{2}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{ax^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \frac{a}{2}\int_1^2 xdx = \left[\frac{ax^2}{2}\ln x - \frac{ax^2}{4}\right]_1^2 =$$

$= (2a\ln 2 - a) - \left(\frac{a}{2}\ln 1 - \frac{a}{4}\right) = 2a\ln 2 - \frac{3}{4}a$

$$\int_1^2 bxdx = \left[\frac{bx^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}$$

Nota: También podrían haberse hecho las integrales indefinidas y después sustituir, etcétera.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 ax\ln x dx - \int_1^2 bx dx = 2a\ln 2 - \frac{3}{4}a - \frac{3b}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx = 8\ln 2 - 9 \quad \rightarrow \quad 2a\ln 2 - \frac{3}{4}a - \frac{3b}{2} = 8\ln 2 - 9 \quad \rightarrow \quad a = 4$$

De la condición del máximo en $x = 1$ dedujimos que $a - b = 0$ o que $a = b$, por tanto $b = 4$.

Si las condiciones son compatibles, $-\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}b = -9$; $\quad -\frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{3}{2}\cdot 4 = -9$. Por tanto:

Solución: $a = 4 \quad b = 4$

Septiembre 2018 Opción B Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$

a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.

En este punto, $f'(x) = -2e$

$f'(x) = -2e^{-2x}$

$f'(x) = -2e \quad \rightarrow \quad \cancel{-2}e^{-2x} = \cancel{-2}e \quad \rightarrow \quad e^{-2x} = e^1 \quad \rightarrow \quad -2x = 1 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

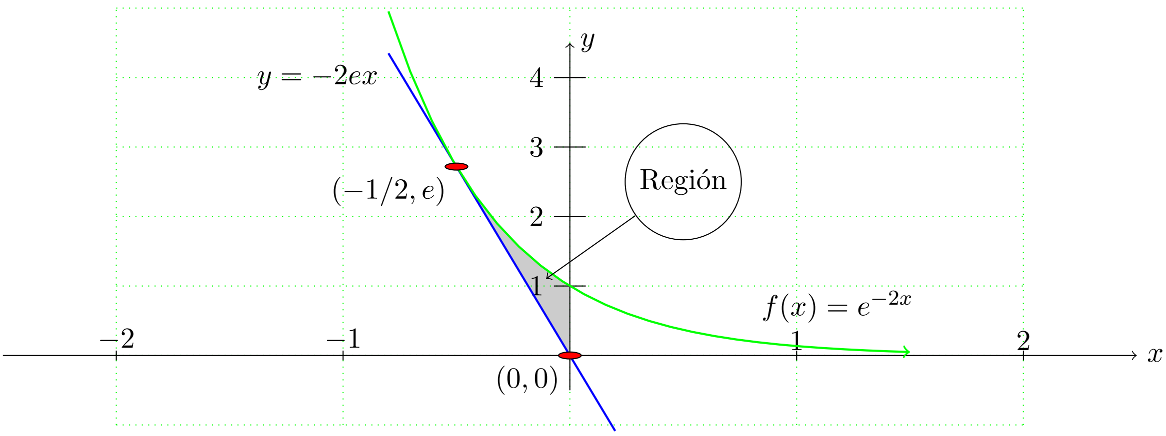
Nota: Nos han pedido un punto. Necesitamos la coordenada y.

$f(-\frac{1}{2}) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = e$

Solución: Punto $\left(-\frac{1}{2}, e\right)$

b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.

Nota: La función e^{-2x} es prácticamente igual a la función e^x girada respecto al eje y. La recta pasa por $\left(-\frac{1}{2}, e\right)$ y por $(0,0)$. El eje de ordenadas es el eje y. Solo hay que representarla.



Ojo: La escala del eje x es tres veces mayor a la del eje y para facilitar la visión del recinto en esta gráfica.

c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

El recinto está delimitado entre las funciones e^{-2x} y $-2ex$ entre $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[e^{-2x} - (-2ex)\right] dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{2ex^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \left[ex^2 - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \left(0 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{e}{4} - \frac{e}{2}\right) = \frac{e}{4} - \frac{1}{2}\ \mathrm{u}^2$$

Junio 2018 Opción A
[2.5 puntos] Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

a) [1,25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

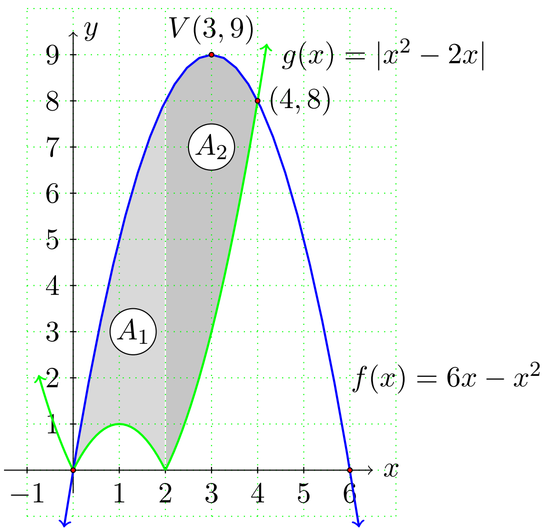
$f(x)$ es una parábola invertida. $f(x) = 6x - x^2 = x(6 - x)$ Corta a los ejes en $(0, 0)$ y en $(6, 0)$.

Vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3 \qquad y_v = f(3) = 6 \cdot 3 - 3^2 = 9$

$g(x)$ es una parábola en valor absoluto o función a trozos. $x^2 - 2x = x(x - 2)$, por lo que cambia de comportamiento en $x = 0$ y $x = 2$. Puesto que $a = 1 > 0$, la parábola es negativa entre $x = 0$ y $x = 2$ y ahí es donde debemos cambiarle el signo.

$$g(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Representamos ambas gráficas:



Las gráficas se cortan en $(0,0)$, puesto que $f(0) = 6\cdot 0 - 0^2 = 0$ y $g(0) = |0^2 - 2\cdot 0| = 0$.

El otro punto de corte parece el $(4,8)$. Procedemos al cálculo exacto.

En $x = 4$, $x > 2$ y por tanto $g(x) = x^2 - 2x$. Igualamos a $f(x)$ y resolvemos.

$$x^2 - 2x = 6x - x^2 \quad \to \quad 2x^2 - 8x = 0 \quad \to \quad 2x(x-4) = 0 \quad \to \quad x = 0;\ x = 4$$

$f(4) = 6\cdot 4 - 4^2 = 8$. Las gráficas se cortan en $(0,0)$ y en $(4,8)$.

b) [1.25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

$$A_t = A_1 + A_2 = \int_0^2 \left[(6x - x^2) - (-x^2 + 2x)\right] dx + \int_2^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] dx =$$

$$= \int_0^2 4x dx + \int_2^4 (8x - 2x^2) dx = \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_2^4 = \left[2x^2\right]_0^2 + \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_2^4 =$$

$$= 8 - 0 + \left(64 - \frac{128}{3}\right) - \left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{56}{3}\ \mathrm{u}^2$$

Junio 2018 Opción B

Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3 - x^2$ y $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$.

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

$f(1) = 3 - 1^2 = 2 \qquad f'(x) = -2x \qquad f'(1) = -2$

$y - f(y_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \to \quad y - 2 = -2(x-1) \quad \to \quad$ Recta tangenge: $y = -2x + 4$

Buscamos los posibles puntos de intersección de la recta tangente con $g(x)$.

$$-2x + 4 = -\frac{x^2}{4} \quad \to \quad -8x + 16 = -x^2 \quad \to \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$$

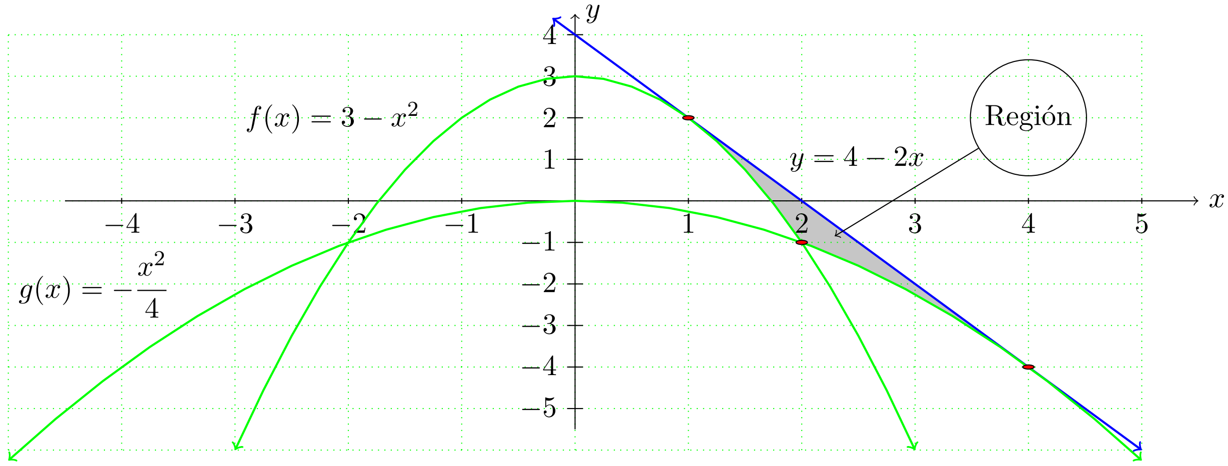
Si en $x = 4$, la pendiente de $g(x)$ coincide con la de $y = -2x + 4$, (o sea, es -2), $-2x + 4$ también será tangente a $g(x)$.

$g'(x) = -\dfrac{2x}{4} = -\dfrac{x}{2} \qquad g'(4) = -\dfrac{4}{2} = -2$. Por tanto también es tangenge a $g(x)$.

$g(4) = -\dfrac{4^2}{4} = -4$. Por tanto el punto de tangencia es $(4, -4)$.

b) [0.75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

Se trata de una recta y dos parábolas. Ya sabemos que la recta pasa por los puntos de tangencia $(1, 2)$ y $(4, 4)$. Las dos parábolas tienen el vértice en $x = 0$, ya que en ambas $b = 0$. Sus cortes con los ejes son: $3 - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} \qquad -\frac{x^2}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$



Queda por calcular el corte entre f y g.

$$f(x) = g(x) \quad \rightarrow \quad 3 - x^2 = -\frac{x^2}{4} \quad \rightarrow \quad 12 - 4x^2 = -x^2 \quad \rightarrow \quad 12 = 3x^2 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$$

$f(2) = 3 - 2^2 = -1$. Se cortan en $(2, -1)$.

c) [0.75 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

$$A_t = A_1 + A_2 = \int_1^2 \left[(4 - 2x) - (3 - x^2)\right] dx + \int_2^4 \left[(4 - 2x) - (-\frac{x^2}{4})\right] dx =$$

$$= \int_1^2 (1 - 2x + x^2)dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) dx = \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 =$$

$$= \left[\left(2 - 4 + \frac{8}{3}\right) - \left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right)\right] + \left[\left(\frac{64}{12} - 16 + 16\right) - \left(\frac{8}{12} - 4 + 8\right)\right] = 1 \text{ u}^2$$

Septiembre 2017 Opción A
[2.5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x=1$.

Datos: $f''(x)=xe^x \qquad f(0)=0 \qquad f'(1)=0$

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int xe^x dx$$

Integramos por partes.

$u=x \quad du=dx \quad dv=e^x dx \quad v=e^x$

$$f'(x)=\int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx = xe^x-e^x+k_1=e^x(x-1)+k_1$$

$f'(1)=0 \quad \to \quad e^1(1-1)+k_1=0 \quad \to \quad k_1=0$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (xe^x-e^x)dx = xe^x-e^x-e^x+k_2=e^x(x-2)+k_2$$

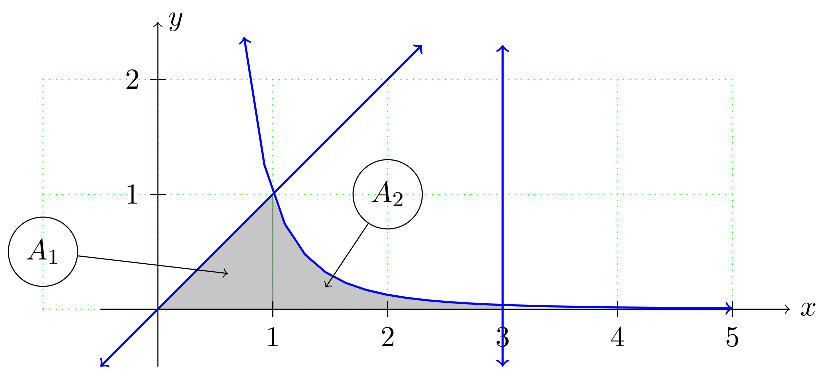
$f(0)=0 \quad \to \quad e^0(0-2)+k_2=0 \quad \to \quad k_2=2$

Solución: $f(x)=e^x(x-2)+2$

Septiembre 2017 Opción B
Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y=x$, la gráfica $y=\dfrac{1}{x^3}$ y la recta $x=3$.

a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.

La recta $y=x$ pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. La recta $x=3$ es vertical y pasa por el punto $(3,0)$. La función $y=\dfrac{1}{x^3}$ es similar a una función inversa $y=\dfrac{1}{x}$. Tiene asíntotas horizontal y vertical en $y=0$ y $x=0$ y pasa por el punto $(1,1)$.



b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

$$A_t = A_1 + A_2 = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x^3} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \int_1^3 x^{-3} dx = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 = \frac{1}{2} + \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^3 =$$
$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{18}\text{ u}^2.$$

c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \frac{1}{x}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

Será mayor. El área de la izquierda, (A_1), no cambia. La función $y = \frac{1}{x}$ tiene valores mayores a la función $y = \frac{1}{x^3}$ siempre que $x > 1$. Por ejemplo, en $x = 2$, $\frac{1}{2} > \frac{1}{2^3}$. Por tanto, el A_2 será mayor y el área total también.

Nota: También puede calcularse el nuevo área y ver que numéricamente es mayor, pero eso no nos da un argumento para explicar porqué.

Junio 2017 Opción A
[2.5 puntos] Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

$y = x^2$ es una parábola centrada en el origen y que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$.

$y = -x^2 + 4x = x(4-x)$ es una parábola invertida que corta al eje x en $(0,0)$ y $(4,0)$.

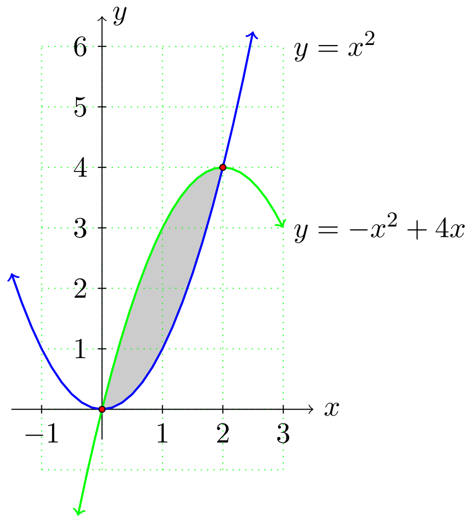
Igualando sus funciones podemos obtener sus puntos de corte:

$x^2 = -x^2 + 4x \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow$
$\rightarrow \quad 2x(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0.$
$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4.$

Se cortan en $(0,0)$ y en $(2,4)$.

La representación está a la derecha.



b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.

$$A=\int_0^2\left[(-x^2+4x)-(x^2)\right]dx$$

c) [1 punto] Calcula el área.

$$A=\int_0^2\left[(-x^2+4x)-(x^2)\right]dx=\int_0^2(4x-2x^2)dx=\left[\frac{4x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=2\cdot 2^2-\frac{2\cdot 2^3}{3}-0=\frac{8}{3}\ \mathrm{u}^2$$

Junio 2017 Opción B

[2.5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t=\sqrt[4]{x}$)

$$t=\sqrt[4]{x}\qquad t^2=\sqrt[4]{x}^2=\sqrt{x}\qquad dt=(x^{\frac{1}{4}})'dx=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{4\sqrt[4]{x}^3}dx\qquad dx=4\sqrt[4]{x}^3dt=4t^3dt$$

$$x=1\quad\to\quad t=\sqrt[4]{1}=1\qquad x=16\quad\to\quad t=\sqrt[4]{16}=2$$

$$\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int_1^2\frac{4t^3dt}{t^2+t}=4\int_1^2\frac{t^2\cdot\cancel{t}dt}{\cancel{t}(t+1)}=4\int_1^2\frac{t^2dt}{t+1}=$$

$$4\int_1^2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=4\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right]_1^2=$$

$$\begin{array}{rr|l} & t^2 & t+1 \\ \hline & -t^2-t & t-1 \\ \hline & -t & \\ & +t+1 & \\ \hline & +1 & \end{array}$$

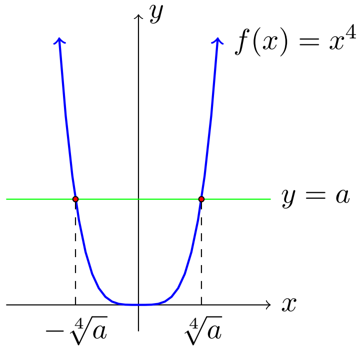
$$=\left[2t^2-4t+4\ln(t+1)\right]_1^2=[(2\cdot 2^2-4\cdot 2+4\ln 3)-(2\cdot 1^2-4\cdot 1+4\ln 2)]=$$

$$=2+4\ln 3-4\ln 2=2+4\ln\tfrac{3}{2}$$

Septiembre 2016 Opción A
[2.5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de f formando con ella un recinto de área $\frac{8}{5}$.

Esbozamos las gráficas $y = x^4$, (similar a $y = x^2$) e $y = a$, (recta horizontal).

En las intersecciones de ambas gráficas $x^4 = a \quad \to \quad x = \pm\sqrt[4]{a}$



Calculamos el área del recinto:

$$A = \int_{-\sqrt[4]{a}}^{\sqrt[4]{a}} (a - x^4)dx = 2\int_0^{\sqrt[4]{a}} (a - x^4)dx = 2\left[ax - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[4]{a}} =$$
$$= 2\left[a\sqrt[4]{a} - \frac{\sqrt[4]{a}^5}{5} - 0\right] = 2\left[\sqrt[4]{a^5} - \frac{\sqrt[4]{a^5}}{5}\right] =$$
$$= 2\sqrt[4]{a^5}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5}\sqrt[4]{a^5}$$

Puesto que $A = \dfrac{8}{5} \quad \to \quad \frac{8}{5} = \frac{8}{5}\sqrt[4]{a^5} \quad \to \quad \sqrt[4]{a^5} = 1 \quad \to \quad a = \sqrt[5]{1^4} = 1$ Recta $y = 1$.

Septiembre 2016 Opción B
[2.5 puntos] Calcula $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$ Sugerencia: $t = \sqrt{x}$

$t = \sqrt{x} \quad \to \quad x = t^2 \quad \to \quad dx = 2tdt$

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t^2}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^3}{1+t}dt =$$
$$= 2\int \left(t^2 - t + 1 + \frac{-1}{1+t}\right)dx =$$
$$= \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|1+t| + k_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + k$$

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{t^3} & & & t+1 \\ \cline{4-4}
-\cancel{t^3} & -t^2 & & t^2 - t + 1 \\ \cline{1-2}
& -\cancel{t^2} & & \\
& \cancel{t^2} & +t & \\ \cline{2-3}
& & t & \\
& & -t & -1 \\ \cline{3-4}
& & & -1
\end{array}$$

$$\text{Solución: } \int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + k$$