Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Septiembre 2019 Opción A
Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$ y $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.

a) [0,75 puntos] Determina los valores de α y de β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el producto escalar por estos vectores será nulo.

$\vec{w} \cdot \vec{u} = (2, \alpha, \beta) \cdot (1, 2, 3) = 2 + 2\alpha + 3\beta$
$\vec{w} \cdot \vec{v} = (2, \alpha, \beta) \cdot (1, -2, -1) = 2 - 2\alpha - \beta$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{cccc} 2 & +\cancel{2\alpha} & +3\beta & = 0 \\ 2 & -\cancel{2\alpha} & -\beta & = 0 \\ \hline 4 & & +2\beta & = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \beta = -2 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{-2-2}{-2} = 2$$

b) [0,75 puntos] Determina los valores de α y de β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

Si $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección tienen que ser proporcionales.

$\vec{w} = k\vec{v} \quad \rightarrow \quad (2, \alpha, \beta) = k(1, -2, -1) \quad \rightarrow \quad 2 = k \quad \alpha = -4 \quad \beta = -2$

c) [1 punto] Para $\alpha = 8$, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el determinante formado por sus componentes tiene que ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & \beta \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-4 - 2\beta + 24) - (2\beta - 12 - 8) = -4\beta + 40$$

$-4\beta + 40 = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = 10$

Septiembre 2019 Opción B

Considera las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-k}{2} = \dfrac{z}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$.

a) [1,5 puntos] Halla k sabiendo que las rectas se cortan en un punto.

Pasamos las rectas a implicitas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x-4 = y-k \\ 2x-4 = z \end{cases} \quad \rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} 2x-y = 4-k \\ 2x-z = 4 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+1 = -y+1 \\ x+1 = -z+3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad s \equiv \begin{cases} x+y = 0 \\ x+z = 2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por estas cuatro ecuaciones. Para ello resolvemos las 3 últimas ecuaciones y por último usamos la primera para determinar el valor de k.

$$\begin{cases} 2x-z=4 \\ x+y=0 \\ x+z=2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} 2x & -z & =4 \\ x & +z & =2 \\ \hline 3x & & =6 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad x=2 \quad z=0 \quad y=-x=-2$$

Usamos la primera ecuación de r sustituyendo las soluciones encontradas para determinar k.

$$2x-y=4-k \quad \rightarrow \quad 2\cdot 2-(-2)=4-k \quad \rightarrow \quad k=-2$$

b) [1 punto] Para $k=1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Si contiene a r, $\vec{v}_r$ es un vector del plano y $P_r(2,1,0)$, (dado que $k=1$), es un punto del plano. Si es paralelo a s, $\vec{v}_s$ es otro vector del plano. Calculamos el plano:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Big(2(x-2)-2(y-1)+z\Big) - \Big(2(x-2)+(y-1)-2z\Big) = -3y+3z+3$$

$$-3y+3z+3=0 \quad \equiv \quad y-z-1=0$$

Solución: Plano $y-z-1=0$

Septiembre 2019 Suplente Opción A

Sea r la recta que pasa por el punto $P(2,-2,-1)$ con vector director $\vec{v}=(k,3+k,-2k)$ y sea π el plano de ecuación $-x+2y+2z-1=0$.

a) [0,5 puntos] Calcula el valor de k para que r sea paralela a π.

Si r es paralela π, su vector director y el normal de π tienen que ser perpendiculares.

$\vec{n}_\pi=(-1,2,2) \quad \vec{v}_r=(k,3+k,-2k)$

$\vec{n}_\pi\cdot\vec{v}_r=(-1,2,2)\cdot(k,3+k,-2k)=-k+6+2k-4k=6-3k$

$\vec{n}_\pi\cdot\vec{v}_r=0 \quad\rightarrow\quad 6-3k=0 \quad\rightarrow\quad k=2$

b) [0,5 puntos] Calcula el valor de k, para que r sea perpendicular a π.

Si r es perpendicular a π, su vector director y el normal de π son paralelos y por tanto proporcionales.

$\vec{n}_\pi=\lambda\vec{v}_r \quad\rightarrow\quad (-1,2,2)=\lambda(k,3+k,-2k)$

$k=-1; \qquad 2=3+k \quad\rightarrow\quad k=-1; \quad 2=-2k \quad\rightarrow\quad k=-1$

Solución: $k=-1$

c) [1,5 puntos] Para $k=-1$, calcula los puntos de r que distan 3 unidades de π.

Determinamos los planos π_1 y π_2 que están a una distancia de 3 unidades de π usando un punto genérico $Q(x,y,z)$ y la fórmula de distancia de un punto a un plano.

$$d(Q,\pi)=3 \quad\rightarrow\quad \frac{|-x+2y+2z-1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}=3 \quad\rightarrow\quad \frac{|-x+2y+2z-1|}{3}=3 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad |-x+2y+2z-1|=9 \quad\rightarrow\quad \begin{array}{lcl} -x+2y+2z-1=9 & \rightarrow & \pi_1\equiv x-2y-2z+10=0 \\ x-2y-2z+1=9 & \rightarrow & \pi_2\equiv x-2y-2z-8=0 \end{array}$$

Ahora buscamos las intersecciones de la recta r con estos planos. Para ello pasamos r a ecuaciones paramétricas teniendo en cuenta que $\vec{v}_r=(k,3+k,-2k)$, con $k=-1$ es $(-1,2,2)$.

$$r\equiv\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} r\cap\pi_1 \quad\rightarrow\quad (2-\lambda)-2(-2+2\lambda)-2(-1+2\lambda)+10=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=2 \quad\rightarrow\quad P_1(0,2,3) \\ r\cap\pi_2 \quad\rightarrow\quad (2-\lambda)-2(-2+2\lambda)-2(-1+2\lambda)-8=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=0 \quad\rightarrow\quad P_2(2,-2,-1) \end{array}$$

Solución: Puntos $(0,2,3)$ y $(2,-2,-1)$

Septiembre 2019 Suplente Opción B

Considera el punto $P(-5,3,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

a) [1 puntos] Calcula la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r.

Pasamos r a forma implicita y usamos el haz de planos.

$$\begin{array}{lcl} 2x = 2y-6 & \rightarrow & x-y+3=0 \\ -x = 2z-4 & \rightarrow & x+2z-4=0 \end{array} \quad \rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ x+2z-4=0 \end{cases}$$

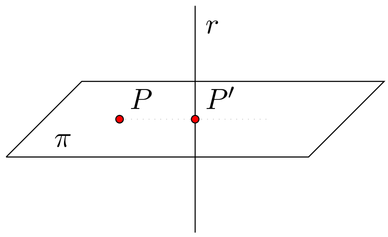
$$(x-y+3)+\lambda(x+2z-4)=0 \overset{P(-5,3,1)}{\rightarrow} (-5-3+3)+\lambda(-5+2\cdot 1-4)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\tfrac{5}{7}$$

$$(x-y+3)-\frac{5}{7}(x+2z-4)=0 \quad \rightarrow \quad 2x-7y-10z+41=0$$

Solución: $2x-7y-10z+41=0$

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

Buscamos el punto P' proyección de P sobre la recta. Para ello trazamos el plano π perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de π es el vector director de la recta, $\vec{v}_r = (2,2,-1)$. Usaremos el punto P para determinar D en el plano.



$$\pi \equiv 2x+2y-z+D=0 \overset{P(-5,3,1)}{\rightarrow} 2\cdot(-5)+2\cdot 3-1+D=0 \quad \rightarrow$$
$$-5+D=0 \quad \rightarrow \quad D=5 \quad \rightarrow \quad \pi \equiv 2x+2y-z+5=0$$

Pasamos r a paramétricas para calcular la intersección entre π y r. Esta intersección es el punto P'.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$

$$\pi \cap r \quad \rightarrow \quad 2\cdot 2\lambda + 2(3+2\lambda)-(2-\lambda)+5=0 \quad \rightarrow \quad 9\lambda+9=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=-1$$

$$P' = \Big(2\cdot(-1), 3+2\cdot(-1), 2-(-1)\Big) = (-2,1,3)$$

El vector director de la recta solución es: $\vec{v} = \overrightarrow{PP'} = (-2,1,3)-(-5,3,1) = (3,-2,2)$

Usando P como punto perteneciente a la recta llegamos a la ecuación solución:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -5+3\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$

Junio 2019 Opción A

Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

a) [1.25 puntos] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

Determinamos los planos mediatrices π_{M1} y π_{M2} que nos dan los puntos del espacio que se encuentran a la misma distancia de π_1 y π_2. Sea P un punto genérico de los planos mediatrices su distancia a π_1 será la misma a la distancia a π_2, por tanto $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$

Nota: Este mismo párrafo, muchos más sintetizado sería: Sean π_{M1} y π_{M2} los planos mediatrices a π_1 y π_2 y sea P un punto que cumple $P \in \pi_{M1}$ y $P \in \pi_{M2}$, entonces $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$

$$\frac{|1x+0y+0z+0|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{|0x+1y+0z+0|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} \rightarrow |x| = |y| \rightarrow \begin{array}{lcl} x = y & \rightarrow & \pi_{M1} \equiv x - y = 0 \\ x = -y & \rightarrow & \pi_{M2} \equiv x + y = 0 \end{array}$$

Las intersecciones de los planos mediatrices con la recta r son los puntos buscados.

Nota: Para las intersecciones ponemos la recta en paramétricas, obtenemos los λ y los sustituimos en la recta.

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \pi_{M1} \cap r \rightarrow (2-\lambda) - (2+3\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \pi_{M2} \cap r \rightarrow (2-\lambda) + (2+3\lambda) = 0 \rightarrow 4 + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda_2 = -2 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow x = 2;\ y = 2;\ z = 1; \qquad \lambda_2 = -2 \rightarrow x = 4;\ y = -4;\ z = -1;$$

Los puntos son $P_1(2,2,1)$ y $P_2(4,-4,-1)$.

b) [1.25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Llamemos s a la recta intersección entre π_1 y π_2. Si los vectores directores de r, s y un vector de cualquier punto de r a s son linealmente dependientes las rectas o se cortan o son coincidentes.

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} P_s(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,0,1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} P_r(2,2,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,3,1) \end{array} \qquad \overrightarrow{P_sP_r} = (2,2,1)$$

$$\left| \begin{array}{c} \overrightarrow{v_s} \\ \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{P_sP_r} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \right| = (+1) \cdot \left| \begin{array}{cc} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{array} \right| = -1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \neq 0 \rightarrow \text{Vectores independientes}$$

Puesto que los vectores son linealmente independientes, las rectas o son paralelas o se cruzan. Al no ser proporcionales $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ no pueden ser paralelas, por tanto las rectas se cruzan.

Nota: Este apartado podría haberse resuelto también poniendo la recta r en forma explícita y analizando los rangos de las 4 ecuaciones formadas por las 2 rectas, aunque el procedimiento sería un poco más largo.

Junio 2019 Opción B

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) [1.25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-1,1,1)$$

$$A = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(-3,-2,-1)|}{2} = \frac{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$$

b) [1.25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0,-1,2)\cdot(-1,1,1) = 1$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

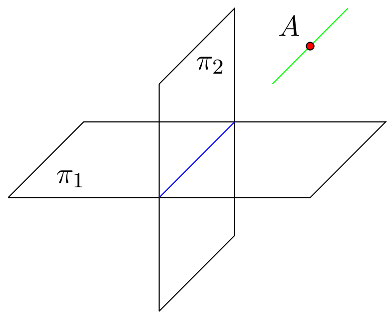
$$\cos(A) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Nota: Ojo. Nos piden el coseno, no el ángulo.

Junio 2019 Suplente Opción A
Considera el punto $A(2,1,0)$ y los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=0$ y $\pi_2 = x-y+z=0$.

a) [1,25 puntos] Calcula la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y a π_2.

Los propios planos π_1 y π_2 forman una recta. La recta paralela a ambos planos es también paralela a esta recta formada por π_1 y π_2. Calculamos el vector director de la recta intersección de ambos planos mediante el producto vectorial de los vectores normales a los planos y usamos el punto A para terminar de determinar la recta.



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (i+j-k)-(-i+j+k) = 2i-2k \equiv (1,0,-1)$$

$$\text{Solución: } r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

b) [1,25 puntos] Calcula los puntos de la recta $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{2}$ que equidistan de π_1 y π_2.

Calculamos los planos bisectrices de π_1 y π_2, cuyos puntos equidistan de ambos planos. Estos planos se obtienen igualando distancias de ambos planos con un punto genérico $P(x,y,z)$. Las intersecciones de estos con la recta son los puntos buscados.

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \quad \rightarrow \quad \frac{|x+y+z|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|x-y+z|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{|x+y+z|}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{|x-y+z|}{\cancel{\sqrt{3}}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} x+y+z = x-y+z \\ x+y+z = -x+y-z \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x+2z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \pi_3 \equiv y = 0 \\ \pi_4 \equiv x+z = 0 \end{cases}$$

π_3 y π_4 son los planos bisectrices. Pasamos s a forma paramétrica para encontrar las intersecciones con ellos.

$$s \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$s \cap \pi_3 \quad \rightarrow \quad 2+3\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\tfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad P_1\left(-\tfrac{1}{3}, 0, -\tfrac{4}{3}\right)$$

$$s \cap \pi_4 \quad \rightarrow \quad (1+2\lambda)+(2\lambda) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\tfrac{1}{4} \quad \rightarrow \quad P_2\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\text{Solución: } \left(-\tfrac{1}{3}, 0, -\tfrac{4}{3}\right) \text{ y } \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}, -\tfrac{1}{2}\right)$$

Junio 2019 Suplente Opción B
Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,a)$ y el plano π de ecuación $x-y+z=0$.

a) [0,75 puntos] Determina a sabiendo que la recta que pasa por A y por B es paralela al plano π.

$\overrightarrow{AB} = (0,-2,a+1)$

Si la recta que pasa por A y B es paralela al plano π, su vector director $\overrightarrow{AB}$ y el vector normal de π son perpendiculares y su producto escalar es nulo.

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \quad \to \quad (0,-2,a+1)\cdot(1,-1,1) = 0 \quad \to \quad 2+a+1=0 \quad \to \quad a=-3$

b) [0,75 puntos] Halla el punto de corte del plano π con la recta que pasa por A y es perpendicular a dicho plano.

Si la recta es perpendicular su vector director es el vector normal del plano, $\vec{n}_\pi = (1,-1,1)$. Llamemos r_a a esta recta y busquemos su intersección con el plano π, punto al que llamaremos A'.

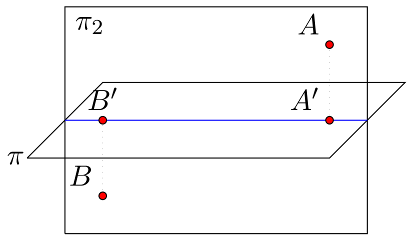
$$r_a \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} ; \qquad \pi\cap r_a \quad \to \quad (\lambda)-(3-\lambda)+(-1+\lambda)=0 \quad \to \quad 3\lambda-4=0 \quad \to \quad \lambda=\frac{4}{3}$$

$A'\left(\frac{4}{3}, 3-\frac{4}{3}, -1+\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

Solución: $\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

c) [1 punto] Para $a=2$, halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano π.

Denominemos π_2 a nuestro plano solución. El vector normal a π es un vector director de π_2 y tanto A como B también pertenecen a este plano. Si proyectamos A y B sobre el plano π, estos puntos A' y B' forman un segundo vector que también pertenece a π_2.



Del apartado anterior ya tenemos calculado A'. Buscamos B'.

$$r_b \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} ; \qquad \pi\cap r_b \quad \to \quad (\lambda)-(1-\lambda)+(2+\lambda)=0 \quad \to \quad 3\lambda+1=0 \quad \to \quad \lambda=-\frac{1}{3}$$

$B'\left(-\frac{1}{3}, 1-\left(-\frac{1}{3}\right), 2+\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$

$\overrightarrow{A'B'} = \left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right) \equiv (5,1,-4)$

Calculamos el plano mediante el método del determinante.

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = [4x+5(y-3)+z+1]-[x-4(y-3)-5(z+1)] = 3x+9y+6z-21$$

Solución: $3x+9y+6z-21=0$

2019 Reserva A - Opción A

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ -y+z+5=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-mz=1$

a) [1,25 puntos] Calcula m sabiendo que r y π son paralelos.

Si son paralelos el producto escalar entre el vector director de la recta y el normal del plano será nulo.

Calculamos el vector director de la recta.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (i-k)-(j) \equiv (1,-1,-1)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \quad \to \quad (1,-1,-1)\cdot(2,1,-m)=0 \quad \to \quad 2-1+m=0 \quad \to \quad m=-1$$

Solución: $m=-1$

b) [1,25 puntos] Para $m=-1$ calcula la distancia entre r y π.

Si $m=-1$, recta y plano son paralelos. Para calcular la distancia basta tomar un punto de r y calcular su distancia al plano π.

En r, si $y=0$, $x=-2$ y $z=-5$. $P_r(-2,0,-5)$.

$$d(P_r,\pi) = \frac{|2\cdot(-2)+1\cdot 0+1\cdot(-5)-1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \text{ u}$$

Solución: $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ u

2019 Reserva A - Opción B

a) [2,5 puntos] Halla cada uno de los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ de manera que junto con los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,1)$ formen un tetraedro de volumen $\dfrac{5}{6}$.

Dado un punto genérico de r, (P_r), podemos usar la fórmula del volumen de un tetraedro usando los vectores $\overrightarrow{P_rA}$, $\overrightarrow{P_rB}$ y $\overrightarrow{P_rC}$ para determinar los puntos solución.

Pasamos r a paramétricas para obtener un punto genérico: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad P_r = (\lambda, \lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{P_rA} = (1,1,0) - (\lambda,\lambda,\lambda) = (1-\lambda, 1-\lambda, -\lambda)$
$\overrightarrow{P_rB} = (1,0,1) - (\lambda,\lambda,\lambda) = (1-\lambda, -\lambda, 1-\lambda)$
$\overrightarrow{P_rC} = (0,1,1) - (\lambda,\lambda,\lambda) = (-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda)$

$$V_{tetr} = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 1-\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 1-\lambda & -\lambda & 1-\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|[-\lambda(1-\lambda)^2 - \lambda(1-\lambda)^2 - \lambda(1-\lambda)^2] - [-\lambda^3 + (1-\lambda)^3 + (1-\lambda)^3]\right| =$$

$$= \frac{1}{6}|-3\lambda(1-\lambda)^2 + \lambda^3 - 2(1-\lambda)^3| = \frac{1}{6}|-3\lambda(1-2\lambda+\lambda^2) + \lambda^3 - 2(1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3)| =$$

$$= \frac{1}{6}|-3\lambda + 6\lambda^2 - 3\lambda^3 + \lambda^3 - 2 + 6\lambda - 6\lambda^2 + 2\lambda^3| = \frac{1}{6}|3\lambda - 2|$$

$$V_{tetr} = \frac{5}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{6}|3\lambda-2| = \frac{5}{6} \quad \rightarrow \quad |3\lambda - 2| = 5 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3\lambda - 2 = 5 & \rightarrow & \lambda = \frac{7}{3} \\ -3\lambda + 2 = 5 & \rightarrow & \lambda = -1 \end{cases}$$

Dado que P_r es $(\lambda, \lambda, \lambda)$,

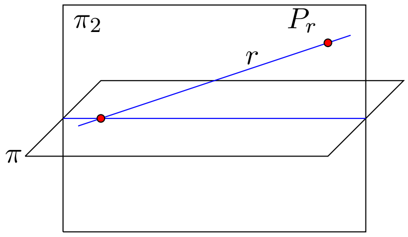
Solución: $P_1\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ y $P_2\left(-1,-1,-1\right)$

2019 Reserva B - Opción A

Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{5}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$

a) [1,25 puntos] Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.

Denominemos π_2 a nuestro plano solución. Este plano contiene a la recta r y por tanto el vector director de r es un vector del plano. Por ser perpendicular a π, el vector normal de π es otro vector del plano. Esto junto con un punto de r nos permite calcular el plano.



$P_r(4,0,1)$ $\quad \vec{v}_r = (2,1,5)$ $\quad \vec{n}_\pi = (2,1,-1)$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [-(x-4) + 10y + 2(z-1)] - [5(x-4) - 2y + 2(z-1)] = -6x + 12y + 24$$

Solución: $x - 2y - 4 = 0$

Nota: Se ha simplificado el resultado del determinante dividiendo entre -6.
Nota: También podría hacerse determinando proyección de P_r sobre π y haz de planos, o proyeccion de P_r e intersección de π con r y usar esos tres puntos, pero son formas más largas aunque correctas.

b) [1.25 puntos] Calcula la distancia entre r y π.

Empezamos por discutir posición relativa entre recta y plano.

Puesto que $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = (2,1,-1)\cdot(2,1,5) = 4 + 1 - 5 = 0$ no pueden ser secantes.

Comprobamos si P_r pertenece a π. $\quad 2\cdot 4 + 0 - 1 + 3 \neq 0$ lo que implica que no son coincidentes.

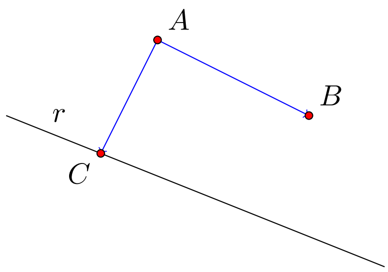
Por tanto recta y plano son paralelos. Para averiguar la distancia calculamos la distancia del punto P_r al plano.

$$d(P_r, \pi) = \frac{|2\cdot 4 + 0 - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \text{ u.}$$

2019 Reserva B - Opción B

Se consideran los puntos $A(0,-1,3)$, $B(2,3,-1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$.

a) [1,25 puntos] Halla el punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.



Tomamos un punto genérico de r, $P_r = (-2+\lambda, 2+2\lambda, 3+3\lambda)$

Si el triángulo ABC es rectángulo en A, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Puesto que C es un punto de r, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP_r}$

$\overrightarrow{AB} = (2,4,-4)$

$$r \equiv \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 3+3\lambda \end{cases}$$

$\overrightarrow{AP_r} = (-2+\lambda, 2+2\lambda, 3+3\lambda) - (0,-1,3) = (\lambda-2, 2\lambda+3, 3\lambda)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_r} = (2,4,-4)\cdot(\lambda-2, 2\lambda+3, 3\lambda) = 2\lambda - 4 + 8\lambda + 12 - 12\lambda = -2\lambda + 8$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_r} = 0 \quad \rightarrow \quad -2\lambda + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 4$

$C = P_{r_{\lambda=4}} = (-2+4, 2+2\cdot 4, 3+3\cdot 4) = (2,10,15)$

b) [1.25 puntos] Calcula los puntos de r que equidistan de los puntos A y B.

Creamos el plano π que equidista de A y B, (plano mediatriz), con el vector $\overrightarrow{AB}$ como vector normal del plano y el punto medio entre A y B, (M_{AB}), como punto del plano. Este plano contiene a todos los puntos que equidistan de A y de B. Si intersección con r es el punto buscado.

$\overrightarrow{AB} = (2,4,-4) \qquad M_{AB} = \left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{3-1}{2}\right) = (1,1,1)$

$\pi \equiv 2x + 4y - 4z + D = 0 \quad \overset{M_{AB}}{\rightarrow} \quad 2\cdot 1 + 4\cdot 1 - 4\cdot 1 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -2$

$\pi \equiv 2x + 4y - 4z - 2 = 0$

$\pi \cap r \quad \rightarrow \quad 2(-2+\lambda) + 4(2+2\lambda) - 4(3+3\lambda) - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad -2\lambda - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -5$

$P_{r_{\lambda=-5}} = (-2+(-5), 2+2\cdot(-5), 3+3\cdot(-5)) = (-7,-8,-12)$

Solución: $(-7,-8,-12)$

Septiembre 2018 Opción A
Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{r} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{array} \right.$$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de r y s.

Sea $P_r(-1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{V_r} = (2, 1, 3)$ un punto y un vector director de r, buscamos un punto y un vector director de la recta s.

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad y = -1 + 2 \cdot 0 = -1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 + 3 \cdot (-1)}{2} = -4 \quad \rightarrow \quad P_s(-4, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{V_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6i + 4j + 2k \equiv (6, 4, 2) \equiv (3, 2, 1)$$

Puesto que $\overrightarrow{V_r} = (2, 1, 3)$ y $\overrightarrow{V_s} = (3, 2, 1)$ no son proporcionales, las rectas ni son paralelas ni son coincidentes.

Si el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_s}$ los 3 vectores estarán en el mismo plano y las rectas se cortarán. En caso contrario se cruzarán.

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-4, -1, 0) - (-1, 0, -1) = (-3, -1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_r P_s} \\ V_r \\ V_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3 + 4 - 9) - (3 - 18 - 2) = 9 \neq 0$$

Por tanto, las rectas se cruzan.

Nota: También podria haberse resuelto creando un vector genérico $\overrightarrow{P_r P_s}$ y planteando perpendicularidad a $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_s}$. En caso de que en el siguiente apartado nos hubiesen pedido la recta común o las intersecciones de esa recta con r y s sería lo más inteligente. Si nos piden la distancia como en este caso esta puede calcularse con una fórmula como veremos a continuación.

b) [1.5 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

$$\left| \overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s} \right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5i + 7j + 1k \equiv (-5, 7, 1)$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left|\overrightarrow{P_rPs},\overrightarrow{V_r},\overrightarrow{V_s}\right|\right|}{\left|\overrightarrow{V_r}\times\overrightarrow{V_s}\right|}=\frac{|9|}{|(-5,7,1)|}=\frac{9}{\sqrt{(-5)^2+7^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{75}}=\frac{3\sqrt{3}}{5}\text{ u}$$

Septiembre 2018 Opción B

Considera las rectas

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{m}=z \qquad \text{y} \qquad s\equiv\begin{cases} x+nz=-2\\ y-z=-3\end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Halla los valores de m y n para los que r y s se cortan perpendicularmente.

Sea $P_r(1,-1,0)$ y $\overrightarrow{V_r}=(2,m,1)$ un punto y un vector director de r. Buscamos P_s y V_s, un punto y un vector director de la recta s.

$$z=0 \quad\rightarrow\quad x=-2 \quad y=-3 \qquad P_s(-2,-3,0)$$

$$\overrightarrow{V_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & n\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-ni+j+k\equiv(-n,1,1)$$

Si $\overrightarrow{V_r}\cdot\overrightarrow{V_s}=0$ las rectas son perpendiculares.

$$\overrightarrow{V_r}\cdot\overrightarrow{V_s}=0 \quad\rightarrow\quad (2,m,1)\cdot(-n,1,1)=0 \quad\rightarrow\quad m-2n+1=0$$

Si el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_s}$ los 3 vectores estarán en el mismo plano y las rectas se cortarán.

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(-2,-3,0)-(1,-1,0)=(-3,-2,0)$$

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{P_rP_s}\\ V_r\\ V_s\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -2 & 0\\ 2 & m & 1\\ -n & 1 & 1\end{vmatrix}=(-3m+2n+0)-(0-3-4)=-3m+2n+7$$

Resolvemos el sistema dado por las 2 condiciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} m & \cancel{-2n} & +1=0\\ -3m & \cancel{+2n} & +7=0\\ \hline -2m & & +8=0\end{array}\right. \quad\rightarrow\quad m=4 \quad n=\frac{5}{2}$$

b) [1 punto] Para $m=3$ y $n=1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s.

Con $m=3$ y $n=1$, los vectores $\overrightarrow{V_r}=(2,m,1)$ y $\overrightarrow{V_s}=(-n,1,1)$ se convierten en $\overrightarrow{V_r}=(2,3,1)$ y $\overrightarrow{V_s}=(-1,1,1)$.

Comprobamos que efectivamente se cortan. Para ello, los vectores $\overrightarrow{V_r}$, $\overrightarrow{V_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$ deben ser combinación lineal. Ya sabemos que:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ V_r \\ V_s \end{vmatrix} = -3m + 2n + 7 = -3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 7 = 0$$

Por tanto, efectivamente, las dos rectas se cortan.

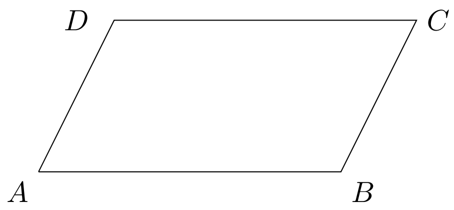
Con los dos vectores $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_s}$ y un punto de una de las rectas, por ejemplo $P_r(1, -1, 0)$, podemos determinar el plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(x-1) - (y+1) + 2z - (x-1) - 2(y+1) + 3z = 2x - 3y + 5z - 5$$

$$\text{Plano: } 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$

Septiembre 2017 Opción A

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.
a) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.



$$A_{par} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

$\overrightarrow{AB} = (1,1,1) \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$

$$A_{par} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right\| = |-2j + 2k| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene e dicho paralelogramo.

Usaremos el punto A y los dos vectores del apartado anterior, $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Big((x-1) - (y-1) + (z-1)\Big) - \Big((x-1) + (y-1) - (z-1)\Big) = -2y + 2z$$

$-2y + 2z = 0 \quad \equiv \quad y - z = 0$

Solución: $y - z = 0$

b) [0,5 punto] Calcula las coordenadas del vértice D.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (1,1,1) + (-1,1,1) = (0,2,2)$

Solución: $D(0,2,2)$

Septiembre 2017 Opción B

Considera punto $P(0,1,1)$ y la recta r dada por $\left\{\begin{array}{r} x-2y=-5 \\ z=+2 \end{array}\right.$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

Podemos usar el haz de planos. $r \equiv \left\{\begin{array}{r} x-2y=-5 \\ z=+2 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{r} x-2y+5=0 \\ z-2=0 \end{array}\right.$

$(x-2y+5)+\lambda(z-2)=0; \quad P(0,1,1) \quad \rightarrow \quad (0-2\cdot 1+5)+\lambda(1-2)=0 \quad \rightarrow \quad 3-\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=3$

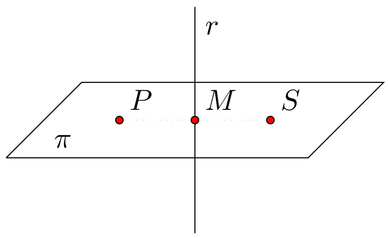
$$(x-2y+5)+3(z-2)=0 \quad \rightarrow \quad x-2y+3z-1=0$$

Nota: Otra forma de hacerlo es tomando 2 puntos de r, creando vectores con P o similar y calculando la ecuación del plano mediante un determinante con un punto y 2 vectores.

Solución: $x-2y+3z-1=0$

b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

Trazamos el plano π perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de π es el vector director de la recta. Pasamos la recta a paramétricas para determinarlo usando y como parámetro.



$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=-5+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \vec{V_r}=(2,1,0)$$

$\pi \equiv 2x+y+0z+D=0; \ P(0,1,1) \quad \rightarrow \quad 2\cdot 0+1+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-1$

$\pi \equiv 2x+y-1=0$

La intersección entre π y r es el punto M, (punto medio entre P y su simétrico S).

$\pi \cap r \quad \rightarrow \quad 2(-5+2\lambda)+\lambda-1=0 \quad \rightarrow \quad 5\lambda-11=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{11}{5}$

$M=\left(-5+2\cdot\frac{11}{5},\frac{11}{5},2\right)=\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right)$

Usamos la fórmula del punto medio para averiguar S.

$$\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right)=\left(\frac{S_x}{2},\frac{S_y+1}{2},\frac{S_z+1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_x=-\frac{6}{5} \quad S_y=\frac{17}{5} \quad S_z=3$$

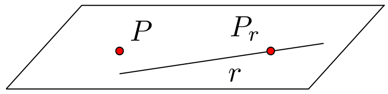
Solución: $\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)$

Junio 2017 Opción A

Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

Un plano viene determinado por un punto y 2 vectores. Podemos usar el punto P, el vector de la recta $\overrightarrow{v_r} = (3,0,1)$ y un segundo vector de origen P y extremo un punto de r, $(P_r(1,-2,0))$.



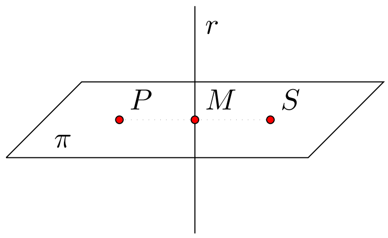
$\overrightarrow{PP_r} = (1,-2,0) - (1,-1,0) = (0,-1,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -3z - (-1(x-1)) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 3z - 1 = 0$$

Solución: $x - 3z - 1 = 0$

b) [1.25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Trazamos el plano π perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de π es el vector director de la recta.



$\overrightarrow{v_r} = (3,0,1) \qquad \pi \equiv 3x + z + D = 0$

Usamos el punto P para determinar D en el plano. $3 \cdot 1 + 0 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -3$

Por tanto, $\pi \equiv 3x + z - 3 = 0$.

Llamemos M a la intersección entre π y r, que es el punto medio entre P y su simétrico S. Calculamos esta intersección determinando t de la recta que satisface la ecuación del plano.

$\pi \equiv 3x + z - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 3(1+3t) + t - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 10t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad M_x = 1 + 3 \cdot 0 = 1 \quad M_y = -2 \quad M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M = (1,-2,0)$

Puesto que M es el punto medio entre P y S, usamos la fórmula del punto medio para despejar las coordenadas de S.

$$(1,-2,0) = \left(\frac{S_x+1}{2}, \frac{S_y-1}{2}, \frac{S_z}{2} \right) \quad \rightarrow \quad S_x = 1 \quad S_y = -3 \quad S_z = 0$$

Simétrico: $(1,-3,0)$

Junio 2017 Opción B

Considera los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v} = (0, 2, 1)$ y $\overrightarrow{w} = (m, 1, n)$

a) [1,25 puntos] Halla m y n sabiendo que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes y que $\overrightarrow{w}$ es ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

Si los vectores son linealmente dependientes su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 2n - 2m - 1 \quad \rightarrow \quad -2m + 2n - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad -2m + 2n = 1$$

Si $\overrightarrow{w}$ es ortogonal a $\overrightarrow{u}$ su producto escalar es nulo.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = (1, 0, 1) \cdot (m, 1, n) = m + n \quad \rightarrow \quad m + n = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{r} -2m + 2n = 1 \\ m + n = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad m = -n \quad \rightarrow \quad -2(-n) + 2n = 1 \quad \rightarrow \quad n = \frac{1}{4} \quad m = -\frac{1}{4}$$

b) [1.25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{w} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \left| 2 - (2m + 1) \right| = \frac{1}{6} \left| 1 - 2m \right|$$

$$V = 10 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{6} |1 - 2m| = 10 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2m = 60 & \rightarrow \quad m = -\frac{59}{2} \\ 2m - 1 = 60 & \rightarrow \quad m = +\frac{61}{2} \end{cases}$$

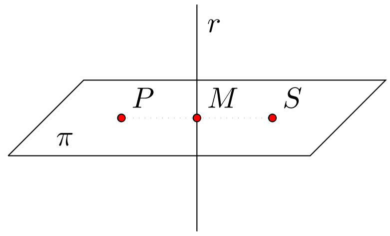
Solución: $m = \frac{61}{2}$ o $m = -\frac{59}{2}$

Septiembre 2016 Opción A

Considera el punto $A(1,-1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r.

Trazamos el plano π perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de π es el vector director de la recta.



$\overrightarrow{v_r} = (2,-1,0) \qquad \pi \equiv 2x - y + D = 0$

Usamos el punto P para determinar D en el plano.

$$2\cdot 1 - (-1) + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -3$$

Por tanto, $\pi \equiv 2x - y - 3 = 0$.

Llamemos M a la intersección entre π y r, que es el punto medio entre P y su simétrico S. Calculamos esta intersección determinando t de la recta que satisface la ecuación del plano.

$$\pi \equiv 2x - y - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2(1+2\lambda) - (1-\lambda) - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 5\lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \tfrac{2}{5} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad M_x = 1 + 2\cdot\tfrac{2}{5} = \tfrac{9}{5} \quad M_y = 1 - \tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} \quad M_z = 1 \quad \rightarrow \quad M = (\tfrac{9}{5}, \tfrac{3}{5}, 1)$$

Puesto que M es el punto medio entre P y S, usamos la fórmula del punto medio para despejar las coordenadas de S.

$$\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) = \left(\frac{S_x+1}{2}, \frac{S_y-1}{2}, \frac{S_z+1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_x = \frac{13}{5} \quad S_y = \frac{11}{5} \quad S_z = 1$$

Simétrico: $(\tfrac{13}{5}, \tfrac{11}{5}, 1)$

Septiembre 2016 Opción B
[2'5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones

$$x = y = z \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Sea r la primera recta y s la segunda.

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]\right|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}$$

$P_r = (0,0,0)$ $\quad \overrightarrow{v_r} = (1,1,1)$ $\qquad P_s = (1,3,0)$ $\quad \overrightarrow{v_s} = (1,1,-1)$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (0,0,0) - (1,3,0) = (-1,-3,0)$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}] = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 0 - 3) - (0 - 1 + 3) = -4$$

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-i + j + k) - (i - j + k) = -2i + 2j \equiv (-2,2,0)$$

$|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]\right|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{|-4|}{\sqrt{8}} = \sqrt{2} \text{ u}$$

Nota: Esto también puede hacerse determinando la posición relativa, donde veriamos que se cruzan, y calculando la perpendicular común a ambas rectas y sus puntos de corte. Por último calculariamos la distancia entre esos dos puntos llegando a la misma solución. Pero ese método es más largo, aunque igualmente válido.