

Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Junio 2019 Opción A

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \quad \text{para } x \neq -1$$

a) [1.5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f

Nota: Al ser una función racional, podemos hacer al mismo tiempo los límites en $\pm\infty$. En otros tipos de funciones habría que hacer 2 límites para cada caso, uno hacia $+\infty$ y otro hacia $-\infty$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \left[\frac{\text{IND}}{\pm\infty} \right]^* = \pm\infty \quad \text{No hay asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} : x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 2x} = \frac{1}{2} \\ n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 4 - x(x + 1)}{2x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 4 - x^2 - x}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 4}{2x + 2} = 1 \end{aligned}$$

Asíntota oblicua en $y = \frac{1}{2}x + 1$

Asíntotas verticales:

Al ser una función racional, solo puede haber asíntotas verticales donde se anule el denominador.

$$2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Comprobamos que efectivamente es una asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) - 4}{2(-1) + 2} = \frac{-7}{0} = \pm\infty$$

Efectivamente hay asíntota vertical en $x = -1$, (no se ha estudiado el posicionamiento).

* Grado del numerador superior al grado del denominador.

b) [1.5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

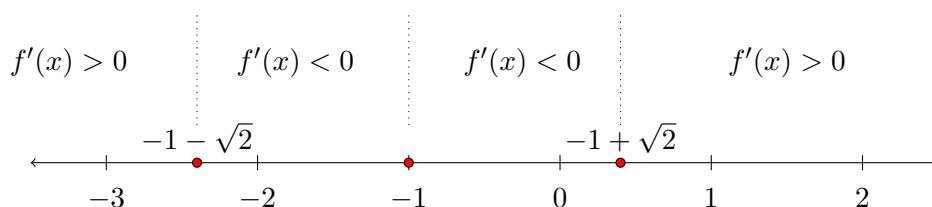
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \quad \text{para } x \neq -1$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(2x + 2) - (x^2 + 3x + 4)(2)}{(2x + 2)^2} = \frac{4x^2 + 4x + 6x + 6 - 2x^2 - 6x - 8}{(2x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2x + 2)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Posibles extremos en $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Función no definida en $x = -1$. Comprobamos signo de la derivada en cada intervalo.



$$f'(-3) = \frac{2(-3)^2 + 4(-3) - 1}{(2(-3) + 2)^2} > 0$$

$$f'(-2) = \frac{2(-2)^2 + 4(-2) - 1}{(2(-2) + 2)^2} < 0$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 1}{(2 \cdot 0 + 2)^2} < 0$$

$$f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1}{(2 \cdot 1 + 2)^2} > 0$$

f decrece en $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$

f crece en $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$

Junio 2019 Opción B Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - a)e^x$

a) [1.25 puntos] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - a)e^x = e^x(x + 1 - a)$$

Si tiene un punto crítico en $x = 0$, entonces $f'(0) = 0$, por tanto:

$$e^0(0 + 1 - a) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 1$$

b) [1.25 puntos] Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f .

$$a = 1 \quad \rightarrow \quad f(x) = (x - 1)e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = xe^x$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (x + 1)e^x$$

Hay puntos de inflexión donde se anula la segunda derivada. Planteamos $f''(x) = 0$.

$$(x + 1)e^x = 0 \quad \rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

Comprobamos signo de la segunda derivada a los lados del posible punto de inflexión.

$$f''(-2) = (-2 + 1)e^{-2} < 0$$

$$f''(0) = (0 + 1)e^0 > 0$$

Puesto que hay cambio de signo hay punto de inflexión en $x = -1$.

$$f(-1) = (-1 - 1)e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

Punto de inflexión en $\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$

Septiembre 2018 Opción A

[2.5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina a , b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

Datos: Si $f(x)$ es continua, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ $f'(-1) = 0$ $f'(-2) = 2$

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}(x)} = \frac{e^0 - e^{-0} - 2 \cdot 0}{0 - \text{sen } 0} = \frac{\text{IND}}{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]}$$

Aplicamos L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}(x)} = \frac{\text{IND}}{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{\text{IND}}{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}(x)} = \frac{1 - 1}{\text{sen } 0} = \frac{\text{IND}}{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{1 + 1}{\cos 0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$f(0) = c \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \quad \rightarrow \quad c = 2$$

Si $x < 0$, $f'(x) = 2ax + b$

$$f'(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad -2a + b = 0$$

$$f'(-2) = 2 \quad \rightarrow \quad -4a + b = 2$$

Resolvemos el sistema:

$$b = 2a \quad \rightarrow \quad -4a + (2a) = 2 \quad \rightarrow \quad -2a = 2 \quad \rightarrow \quad a = -1 \quad \rightarrow \quad b = -2$$

$$\text{Solución: } a = -1 \quad b = -2 \quad c = 2$$

Septiembre 2018 Opción B

Considera la función f definida por $f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde \ln denota logaritmo neperiano.

[1,5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y $x = 2$.

Datos: $f'(1) = 0$ $f'(2) = 0$

$$f'(x) = a \frac{1}{x} + 2bx + 1$$

$$f'(1) = a \frac{1}{1} + 2b(1) + 1 = a + 2b + 1 \quad f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad a + 2b + 1 = 0$$

$$f'(2) = a \frac{1}{2} + 2b(2) + 1 = \frac{a}{2} + 4b + 1 \quad f'(2) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 1 = 0 \\ \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ \frac{a}{2} + 4b = -1 \end{cases} \xrightarrow{(-2) \cdot Ec2} \begin{cases} a + 2b = -1 \\ -a - 8b = +2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{6} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Solución: } a = -\frac{2}{3} \quad b = -\frac{1}{6}$$

b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

Usaremos el signo de la segunda derivada para determinarlo. Sustituimos $a = -\frac{2}{3}$ y $b = -\frac{1}{6}$.

Nota: También podríamos hacerlo viendo si la función crece o decrece a izquierda y derecha de cada punto mediante la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1 = -\frac{2}{3x} + 2\left(-\frac{1}{6}\right)x + 1 = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1$$

$$f''(x) = -\frac{0 \cdot 3x - 2 \cdot 3}{9x^2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{6}{9x^2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

$$f''(1) = \frac{2}{3 \cdot 1^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo.}$$

$$f''(2) = \frac{2}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo.}$$

Solución: Mínimo en $x = 1$ Máximo en $x = 2$

Junio 2018 Opción A

[2.5 puntos] Halla los coeficientes a , b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y la gráfica de f pasa por el punto $(1, 1)$.

Datos: Si tiene derivada nula en $x = 1$, $f'(1) = 0$. Si no es extremo relativo en $x = 1$, $f''(1) = 0$. Si pasa por $(1, 1)$, $f(1) = 1$.

$$f(1) = 1 \quad \rightarrow \quad 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \quad \rightarrow \quad a + b + c = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \quad \rightarrow \quad 2a + b = -3$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 1 + 2a = 0 \quad \rightarrow \quad 2a = -6 \quad \rightarrow \quad a = -3$$

Por tanto:

$$b = -3 - 2a = -3 - 2 \cdot (-3) = 3 \quad c = -a - b = -(-3) - 3 = 0$$

$$\text{Solución: } a = -3 \quad b = 3 \quad c = 0$$

Junio 2018 Opción B

[2.5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es derivable.

$$f(1) = 3 - k \cdot 1^2 = 3 - k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3 - kx^2) = 3 - k \cdot 1^2 = 3 - k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow 3 - k = \frac{2}{k} \rightarrow 3k - k^2 = 2 \rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Con $k = 1$ o $k = 2$, $f(x)$ es continua.

$$f'(x) = \begin{cases} -2kx & \text{si } x < 1 \\ \frac{-2}{kx^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-2kx) = -2k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{kx^2} = -\frac{2}{k}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \rightarrow -2k = -\frac{2}{k} \rightarrow k^2 = \frac{-2}{-2} \rightarrow k = \pm 1$$

Con $k = -1$, f parece derivable, pero como no es continua si $k = -1$, tampoco es derivable. Sin embargo, con $k = 1$, f es continua y derivable.

Solución: $k = 1$

Septiembre 2017 Opción A

[2.5 puntos] Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2 , el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Dado la imagen de la derecha podemos obtener 2 ecuaciones para las áreas de la tarjeta. La segunda es el área que queremos minimizar.

$$x \cdot y = 100$$

$$A_t = (x + 10)(y + 5)$$

$$y = \frac{100}{x} \rightarrow A_t = (x + 10) \left(\frac{100}{x} + 5 \right) = 100 + 5x + \frac{1000}{x} + 50 = 150 + 5x + \frac{1000}{x}$$

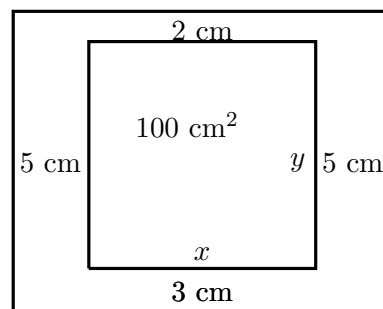
$$A'_t(x) = 5 - \frac{1000}{x^2} \quad A'_t(x) = 0 \rightarrow 5 = \frac{1000}{x^2} \rightarrow x = \pm\sqrt{200} = \pm 10\sqrt{2}$$

Evidentemente la solución negativa no es válida. Comprobamos que la solución positiva es un mínimo con el criterio de la segunda derivada.

$$A''_t(x) = \frac{2000}{x^3} \quad A''_t(10\sqrt{2}) = \frac{2000}{(10\sqrt{2})^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

$$y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Dimensiones de la tarjeta. Ancho: $10\sqrt{2} + 10$ cm. Alto: $5\sqrt{2} + 5$ cm.



Septiembre 2017 Opción B

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f . Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

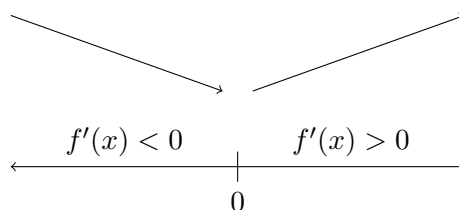
La función es continua en \mathbb{R} , por ser mitad de la suma de dos funciones continuas.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \rightarrow e^x = e^{-x} \rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow x = 0$$

$$f'(-1) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-(-1)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - e\right) < 0 \Rightarrow \text{Decrece.}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) > 0 \Rightarrow \text{Crece.}$$



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

$$f(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$$

Mínimo: abscisa: $x = 0$, valor: $y = 1$.

b) [0,5 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

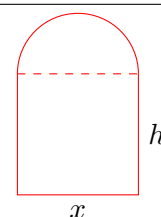
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$x_0 = 0 \quad f(0) = 1 \quad f'(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

Si la pendiente a $f(x)$ en $x = 0$ es cero, entonces la pendiente de la recta normal, $(-\frac{1}{0})$, es infinita. Por tanto la ecuación de la recta normal, al pasar por el punto $(0, 1)$, es $x = 0$.

Junio 2017 Opción A [2.5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.

Si es posible, determine la base x para que el perímetro sea mínimo.



El radio del semicírculo es de $r = \frac{x}{2}$. La longitud de su arco es $l = 2\pi r = 2\pi \frac{x}{2} = \pi x$. Por tanto el perímetro total es: $P = x + 2h + \pi x$.

El área de la figura es suma del área de un rectángulo más la de un semicírculo:

$$A_t = xh + \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xh + \frac{\pi x^2}{8} \quad A_t = 16 \quad \rightarrow \quad xh + \frac{\pi x^2}{8} = 16 \quad \rightarrow \quad h = \frac{16 - \frac{\pi x^2}{8}}{x} = \frac{16}{x} - \frac{\pi}{8}x$$

Obtenemos una expresión para el perímetro, (lados del rectángulo más media circunferencia), y derivamos para buscar posibles mínimos.

$$P = x + 2h + \frac{2\pi \frac{x}{2}}{2} = x + 2 \left(\frac{16}{x} - \frac{\pi}{8}x \right) + \frac{\pi}{2}x = \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) x + \frac{32}{x} - \frac{\pi}{4}x = \left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) x + \frac{32}{x} =$$

$$= \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) x + \frac{32}{x}$$

$$P'(x) = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{32}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{32}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4 + \pi}{4} = \frac{32}{x^2} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{128}{4 + \pi}}$$

Comprobamos que el punto hallado es un mínimo con el criterio de la segunda derivada.

$$P''(x) = 0 + 0 - \frac{0 \cdot x^2 - 32 \cdot 2x}{x^4} = \frac{64}{x^3}$$

$$P'' \left(\sqrt{\frac{128}{4 + \pi}} \right) > 0 \quad \rightarrow \quad P \left(\sqrt{\frac{128}{4 + \pi}} \right) \text{ es un mínimo.}$$

$$\text{Solución: } x = \sqrt{\frac{128}{4 + \pi}}$$

Junio 2017 Opción B

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Nota: Al ser una función racional, podemos hacer al mismo tiempo los límites en $\pm\infty$. En otros tipos de funciones habría que hacer 2 límites para cada caso, uno hacia $+\infty$ y otro hacia $-\infty$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{\text{IND}}{\pm\infty} \right] = \pm\infty \text{ No hay asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} : x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Asíntota oblicua en $y = x + 1$

Asíntotas verticales:

Al ser una función racional, solo puede haber asíntotas verticales donde se anule el denominador.

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Comprobamos que efectivamente es una asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1^2}{1-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

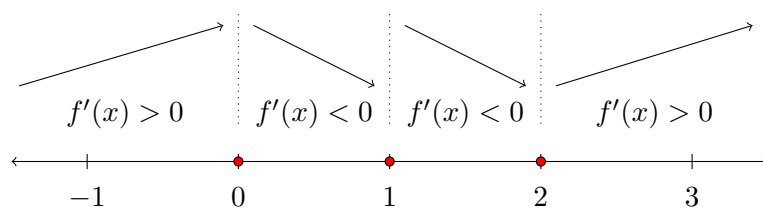
Efectivamente hay asíntota vertical en $x = 1$, (no se ha estudiado el posicionamiento).

b) [1.5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f . Calcula los extremos relativos de f (abcisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad x = 2$$

Posibles extremos en $x = 0$ o $x = 2$. Función no definida en $x = 1$. Comprobamos signo de la derivada en cada intervalo.



$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} > 0$$

$$f'(0,5) = \frac{0,5^2 - 2 \cdot 0,5}{(0,5^2 - 1)^2} < 0$$

$$f'(1,5) = \frac{1,5^2 - 2 \cdot 1,5}{(1,5^2 - 1)^2} < 0$$

$$f'(3) = \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{(3-1)^2} > 0$$

f decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$ f crece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

En $x = 0$ hay un máximo. $f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$ Abcisa: $x = 0$. Valor: 0

En $x = 2$ hay un mínimo. $f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$ Abcisa: $x = 2$. Valor: 4