Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Junio 2019 Opción A
(2.5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliester. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Llamemos x a el número de camisetas lisas e y a el número de camisetas estampadas. Hacemos una tabla con los datos y extraemos las inecuaciones del sistema.

	x	y	
Algodón	70	60	4200
Poliéster	20	10	800

$70x + 60y \leq 4200 \quad \rightarrow \quad 7x + 6y \leq 420$

$20x + 10y \leq 800 \quad \rightarrow \quad 2x + y \leq 80$

$y \geq 10 \qquad 2y \geq x \qquad x \geq 0$

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$7x + 6y = 420$

x	y
0	70
60	0

$2x + y = 80$

x	y
0	80
40	0

$2y = x$

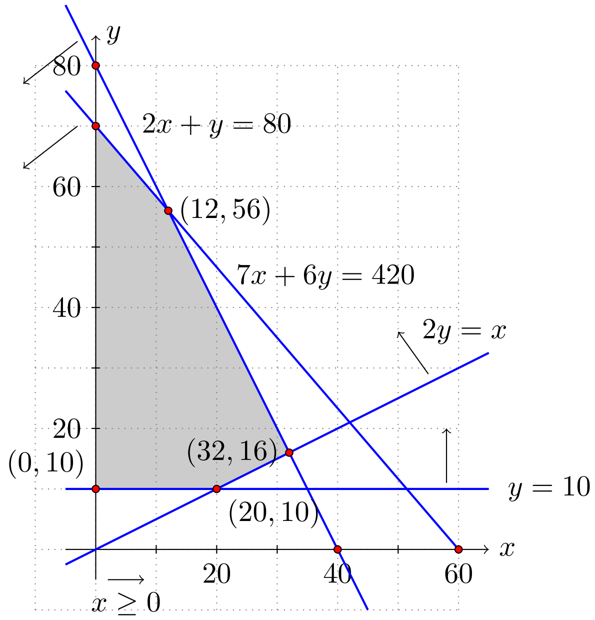
x	y
0	0
100	50

$$\begin{cases} 2y = x \\ 2x + y = 80 \end{cases}$$

$4y + y = 80$
$5y = 80$
$y = \frac{80}{5} = 16$
$x = 2 \cdot 16 = 32$

$$\begin{cases} 7x + 6y = 420 \\ 2x + y = 80 \end{cases}$$

$y = 80 - 2x$
$7x + 6(80 - 2x) = 420$
$7x + 480 - 12x = 420$
$-5x = -60$
$x = 12$
$y = 80 - 2 \cdot 12 = 56$



Vértices: $(0, 10)$ $(0, 70)$ $(12, 56)$ $(32, 16)$ $(20, 10)$
Función objetivo: $f(x, y) = 5x + 4y$

$f(0, 10) = 4 \cdot 10 = 40$
$f(0, 70) = 4 \cdot 70 = 280$
$f(12, 56) = 5 \cdot 12 + 4 \cdot 56 = 284$
$f(32, 16) = 5 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 224$
$f(20, 10) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 140$

Hay que fabricar 12 camisetas lisas y 56 estampadas. El beneficio obtenido es de 284€.

Septiembre 2018 Opción A
Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \leq 11 \qquad x \geq 2y - 5 \qquad 3x + y \leq 18 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

a) (1.8 puntos) Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$x + 2y = 11$

x	y
0	5,5
11	0

$0{+}2{\cdot}0 \leq 11$

$x = 2y - 5$

x	y
0	2,5
−5	0

$0 \geq 2 \cdot 0 - 5$

$3x + y = 18$

x	y
0	18
6	0

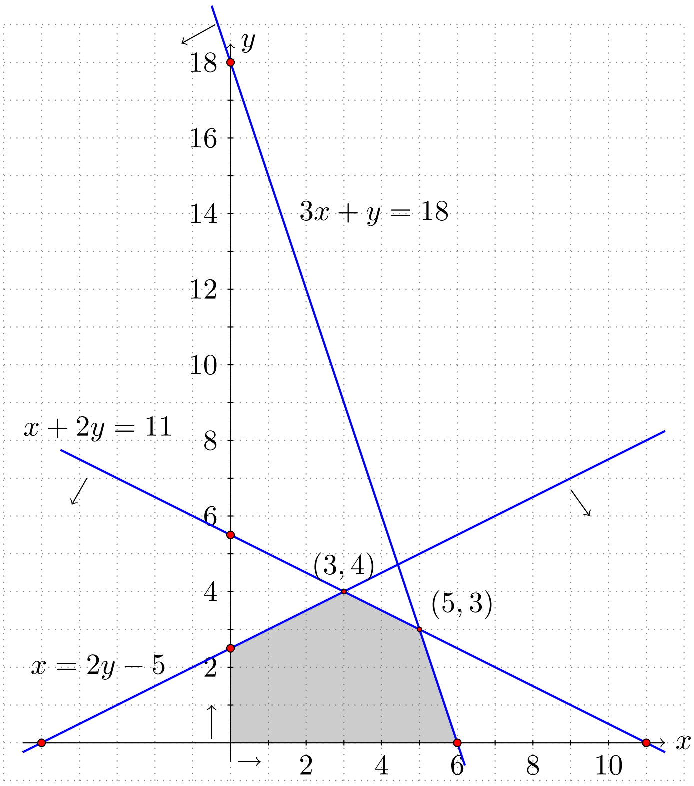
$3{\cdot}0{+}0 \leq 18$

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x = 2y - 5 \end{cases}$$

$2y - 5 + 2y = 11$
$4y = 16$
$y = 4$
$x = 2 \cdot 4 - 5 = 3$

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x + y = 18 \end{cases}$$

$x = 11 - 2y$
$3(11 - 2y) + y = 18$
$33 - 6y + y = 18$
$-5y = -15$
$y = 3$
$x = 11 - 2 \cdot 3 = 5$



b) (1 punto) Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

Vértices: $(0,0)$ $(6,0)$ $(5,3)$ $(3,4)$ $(0,2'5)$
Función objetivo: $F(x, y) = 2x + 3y$

$f(0,0) = 0$
$f(6,0) = 2 \cdot 6 = 12$
$f(5,3) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19$
$f(3,4) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$
$f(0,2'5) = 3 \cdot 2'5 = 7'5$

Mínimo en $(0,0)$ de valor 0. Máximo en $(5,3)$ de valor 19.

c) (0.2 puntos) Justifique si el punto $(5.5, 2)$ pertenece a la región factíble.

Para pertenecer a la región factible debe cumplir todas las inecuaciones.

$x + 2y \leq 11 \quad \rightarrow \quad 5.5 + 2 \cdot 2 = 9.5 \leq 11$ Cierto
$x \geq 2y - 5 \quad \rightarrow \quad 5.5 \geq 2 \cdot 2 - 5 = -1$ Cierto
$3x + y \leq 18 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 5.5 + 2 = 18.5 \leq 18$ Falso
$x \geq 0 \quad \rightarrow \quad 5.5 \geq 0$ Cierto
$y \geq 0 \quad \rightarrow \quad 2 \geq 0$ Cierto

Puesto que no se cumple una de las inecuaciones, el punto no pertenece a la región factible.

Junio 2018 Opción A
a) (1 punto) Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar:
"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0.50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0.25 euros, calcule cuántos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

Llamemos x a el número de kg de maíz e y a el número de kg pienso. Hacemos una tabla con los datos y extraemos las inecuaciones del sistema.

	x	y	
Hidratos de carbono	600	300	1800
Proteinas	200	600	2400

$600x + 300y \geq 1800$
$200x + 600y \geq 2400$
$x \geq 0 \qquad y \geq 0$

$F(x,y) = 0.50x + 0.25y$

b) (1.5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0 \qquad x \leq 2y + 2 \qquad x + y \leq 5$$

Calcule el máximo de $F(x,y) = 4x + 3y$ en ese recinto, así como el punto donde se alcanza.

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$x = 2y + 2$

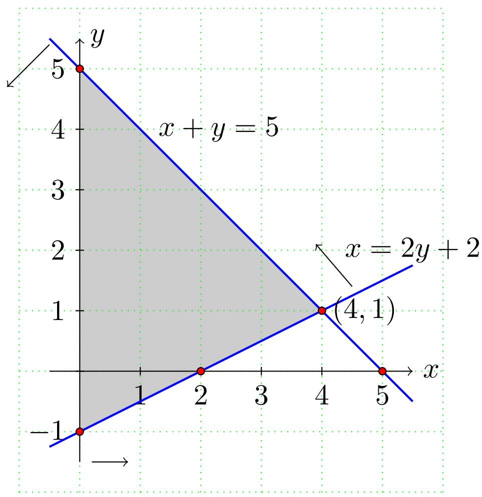
x	y
0	-1
2	0

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

$$\begin{cases} x = 2y + 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$2y + 2 + y = 5$
$3y = 3$
$y = 1$
$x = 2 \cdot 1 + 2 = 4$



Vértices: $(0,-1) \quad (4,1) \quad (0,5)$
Función objetivo: $F(x,y) = 4x + 3y$

$F(0,-1) = 3 \cdot (-1) = -3$
$F(4,1) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 19$

$F(0,5) = 3 \cdot 5 = 15$

Máximo en $(4,1)$ de valor 19.