Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Junio 2019 Opción B

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [0.5 puntos] Razone si la matriz A es simétrica.

Una matriz es simétrica siempre que sus elementos cumplan que $a_{ij} = a_{ji}$.

La matriz A no es simétrica puesto que $a_{23} = -1 \neq a_{32} = 1$

b) [1 punto] Calcule A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2) - (-1+4) = -1 \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -(-2) & 2 \\ -(-2) & 1 & -(-1) \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nota: También podría haberse calculado por el método de Gauss-Jordan o mediante 3 sistemas de 9 ecuaciones.

c) [1 punto] Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0$

$$2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2X \cdot A = A^2 + 3I_3 \quad \rightarrow \quad X \cdot \cancel{A \cdot A^{-1}} = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Septiembre 2018 Opción B

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule $A^{2018} + A^{2019}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I$$

Para n par, $A^n = I$. Para n impar, $A^n = A$.

$$A^{2018} + A^{2019} = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + B \cdot B^t = 2A$

Despejamos la matriz X.

$$X \cdot A + B \cdot B^t = 2A \quad \rightarrow \quad X \cdot A = 2A - B \cdot B^t \quad \rightarrow \quad X \cdot \cancel{A \cdot A_1} = (2A - B \cdot B^t) \cdot A^{-1}$$

$$|A| = -1 \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = (2A - B \cdot B^t) \cdot A^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$$