Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) + ax + b & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

$\operatorname{sen}(x) + ax + b$ es continua en $\mathbb{R}$. $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ no es continua en 0 por el denominador, ni en $x \leq -1$ por el logarítmo, pero como está definida para $x > 0$, es continua en su dominio. Queda la duda de si $f(x)$ es continua en $x = 0$.

$f(0) = \operatorname{sen} 0 + a \cdot 0 + b = b$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (\operatorname{sen}(x) + ax + b) = \operatorname{sen} 0 + a \cdot 0 + b = b$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \overset{IND}{\left[\frac{0}{0}\right]} \overset{L'Hospt}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

Para que $f(x)$ sea continua, $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \quad \to \quad b = 1$

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x+1}x - \ln(x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x+1}}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) + a & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0} (cos(x) + a) = \cos 0 + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{0 - 1 \cdot \ln 1}{0} = \overset{IND}{\left[\frac{0}{0}\right]} \overset{L'Hospt}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left[1 \cdot \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1}\right]}{2x(x+1) + (x^2) \cdot 1} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\ln(x+1)}{3x^2 + 2x} = \frac{-\ln 1}{0 + 0} = \overset{IND}{\left[\frac{0}{0}\right]} \overset{L'Hospt}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x + 2} = -\frac{1}{2}$$

Para que $f(x)$ sea derivable, $1 + a = -\frac{1}{2} \quad \to \quad a = -\frac{3}{2}$

Solución: $a = -\frac{3}{2} \quad b = 1$

Ejercicio 2.- Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{-x^2}$.

a) [1.25 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

Corte con el eje y, $(x = 0)$. $\quad f(0) = 0 \cdot e^{-0^2} = 0$. Corte en $(0, 0)$.

Corte con el eje x, $(f(x) = 0)$. $\quad 0 = x \cdot e^{-x^2} \quad \to \quad x = 0 \qquad e^{-x^2} = 0$, (sin solución).
Corte en $(0, 0)$.

El único corte con los ejes se da en $(0, 0)$.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad (1 - 2x^2)e^{-x^2} = 0 \quad \to \quad \begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 & \to \quad x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ e^{-x^2} = 0 & \text{Sin solución} \end{cases}$$

Usamos el criterio de la segunda derivada para discriminar extremos.

$$f''(x) = -4xe^{-x^2} + (1 - 2x^2)(-2x)e^{-x^2} = (4x^3 - 6x)e^{-x^2}$$

$$f''\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(4\left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 6\left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)e^{-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} > 0 \quad \to \quad \text{Mínimo}$$

$$f''\left(\frac{+\sqrt{2}}{2}\right) = \left(4\left(\tfrac{+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 6\left(\tfrac{+\sqrt{2}}{2}\right)\right)e^{-\left(\frac{+\sqrt{2}}{2}\right)^2} < 0 \quad \to \quad \text{Máximo}$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$\text{Mínimo en } \left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{1}{\sqrt{2e}}\right) \qquad \text{Máximo en } \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$

b) [1.25 puntos] Determina $a > 0$ de manera que sea $\dfrac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Puesto que la función no corta al eje x, excepto en $x = 0$, podemos calcular el área integrando entre 0 y a.

$$A = \int_0^a xe^{-x^2} dx$$

Efectuaremos la integral mediante el método de cambio de variable:

$$u = -x^2 \quad \to \quad du = -2xdx \quad \to \quad xdx = \frac{du}{-2}$$

$$x = 0 \quad \to \quad u = -0^2 = 0; \qquad x = a \quad \to \quad u = -a^2$$

$$A = \int_0^a xe^{-x^2}dx = \int_0^{-a^2} e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}[e^u]_0^{-a^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - e^0\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - 1\right)$$

$$A = \frac{1}{4} \quad \to \quad -\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - 1\right) = \frac{1}{4} \quad \to \quad e^{-a^2} - 1 = -\tfrac{1}{2} \quad \to \quad e^{-a^2} = \frac{1}{2} \quad \to \quad -a^2 = \ln\tfrac{1}{2} \quad \to$$

$$\to \quad a = \pm\sqrt{\ln 2 - \ln 1} = \pm\sqrt{\ln 2}$$

Puesto que a tiene que ser positivo según el enunciado:

Solución: $a = \sqrt{\ln 2}$

Ejercicio 3.- [2.5 puntos] Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Sea x el ángulo menor, y el mediano y z el mayor y teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es de 180 grados, del enunciado podemos concluir:

$$x + y + z = 180 \qquad x = \frac{z}{2} \qquad x + z = 2y$$

Escribimos estos datos en forma de sistema y resolvemos por Gauss:

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 180 \\ 2x & & -z & = 0 \\ x & -2y & +z & = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{F_3=F_3+2F_1} \left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 180 \\ 2x & & -z & = 0 \\ 3x & & +3z & = 360 \end{array}\right. \xrightarrow{F_3=F_3+3F_2}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 180 \\ 2x & & -z & = 0 \\ 9x & & & = 360 \end{array}\right. \quad \to \quad x = \frac{360}{9} = 40 \quad z = 2x = 80 \quad y = 180 - x - z = 60$$

Solución: 40, 60 y 80°

Ejercicio 4.- Considera las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-k}{2} = \dfrac{z}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$.

a) [1,5 puntos] Halla k sabiendo que las rectas se cortan en un punto.

Pasamos las rectas a implicitas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x-4 = y-k \\ 2x-4 = z \end{cases} \quad \rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} 2x-y = 4-k \\ 2x-z = 4 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+1 = -y+1 \\ x+1 = -z+3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad s \equiv \begin{cases} x+y = 0 \\ x+z = 2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por estas cuatro ecuaciones. Para ello resolvemos las 3 últimas ecuaciones y por último usamos la primera para determinar el valor de k.

$$\begin{cases} 2x-z = 4 \\ x+y = 0 \\ x+z = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \begin{array}{ccc} 2x & -z & = 4 \\ x & +z & = 2 \\ \hline 3x & & = 6 \end{array} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad z = 0 \quad y = -x = -2$$

Usamos la primera ecuación de r sustituyendo las soluciones encontradas para determinar k.

$$2x - y = 4-k \quad \rightarrow \quad 2\cdot 2 - (-2) = 4-k \quad \rightarrow \quad k = -2$$

b) [1 punto] Para $k = 1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Si contiene a r, $\vec{v}_r$ es un vector del plano y $P_r(2,1,0)$, (dado que $k=1$), es un punto del plano. Si es paralelo a s, $\vec{v}_s$ es otro vector del plano. Calculamos el plano:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Big(2(x-2) - 2(y-1) + z\Big) - \Big(2(x-2) + (y-1) - 2z\Big) = -3y + 3z + 3$$

$$-3y + 3z + 3 = 0 \quad \equiv \quad y - z - 1 = 0$$

Solución: Plano $y - z - 1 = 0$