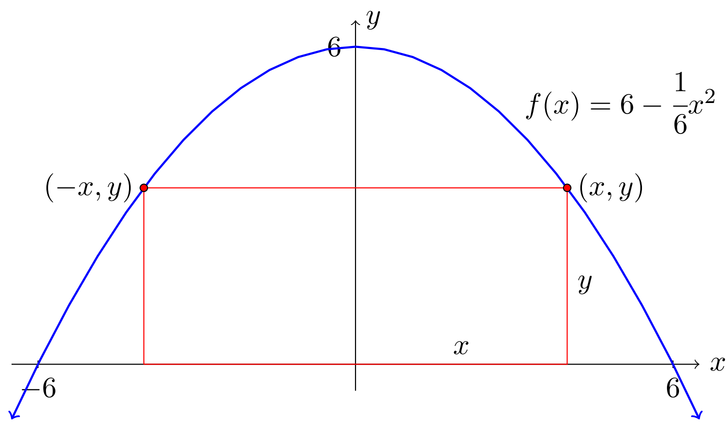
*Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.*

**Ejercicio 1.- [2,5 puntos]** Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de $f$ y la recta $y = 0$.

Esbozamos el problema.




El área del rectángulo es: $A = 2x \cdot y$

También sabemos que $y = 6 - \frac{1}{6}x^2$. Por tanto: $A(x) = 2x\left(6 - \frac{1}{6}x^2\right) = 12x - \frac{1}{3}x^3$.

$A'(x) = 12 - \frac{3x^2}{3} = 12 - x^2 \qquad A'(x) = 0 \quad \to \quad 12 - x^2 = 0 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

Tomamos la solución positiva, (no tiene sentido hablar de longitudes negativas en un rectángulo).

Demostramos que la solución es un máximo con el criterio de la segunda derivada.

$A''(x) = -2x \qquad A''(2\sqrt{3}) = -2 \cdot 2\sqrt{3} < 0 \quad \to \quad$ Máximo.

Base: $2x = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \qquad$ Altura: $y = 6 - \frac{1}{6}(2\sqrt{3})^2 = 4$

Dimensiones: $4\sqrt{3} \times 4$

**Ejercicio 2.- [2.5 puntos]** Determina la función $f : (0, +\infty) \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de $f$ pasa por el punto $(1, 0)$.

Datos: $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \qquad f(1) = 0$

$f(x) = \displaystyle\int f'(x)dx = \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ Integramos por partes.

$u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}dx \qquad dv = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad v = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

$f(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2 \cdot 2\sqrt{x} + k$

$f(1) = 0 \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{1}\ln 1 - 4\sqrt{1} + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 4$

Solución: $f(x) = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + 4$

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{cccl} x & +y & +2z & = 0 \\ (m+2)x & +y & -z & = m \\ 3x & +(m+2)y & +z & = m \end{array} \right.$$

**a) [1.5 puntos]** Discute el sistema según los valores de $m$.

Sea $C$ la matriz de coeficientes del sistema y $A$ la matriz ampliada, estudiamos sus rangos por determinantes y menores para discutir el sistema.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix} = \Big(1+2(m+2)^2-3\Big) - \Big(6-(m+2)+(m+2)\Big) = 2m^2+8m = 2m(m+4)$$

$|C| = 0 \quad \rightarrow \quad 2m(m+4) = 0 \quad \rightarrow \quad m = 0 \quad m = -4$

Si $m \neq 0$ y $m \neq -4$, $Rg(C) = 3$ y por tanto $Rg(A) = 3$ y el sistema es compatible determinado.

Con $m = 0$ es sistema es homogeneo y puesto que $Rg(C) < 3$, el sistema es compatible indeterminado.

*Nota: Recordemos. Con $m = 0$ la columna de terminos independientes serán todos ceros y por tanto es homogeneo.*

Estudiamos el caso con $m = -4$. La matriz de coeficientes es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que el determinante de $C$ es nulo. Por otra parte el menor formado por $c_{11}$, $c_{12}$, $c_{21}$ y $c_{22}$,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) \neq 0$. Por tanto $Rg(C) = 2$ y $Rg(A) \geq 2$.

Para calcular el rango de $A$, eliminamos su tercera columna y calculamos el determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-4 + 0 - 12) - (0 + 8 + 8) \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg(A) = 3$$

Por tanto, con $m = -4$, $Rg(C) = 2 \neq Rg(A) = 3 \quad \rightarrow \quad$ sistema incompatible.

**b) [1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$

Ya hemos visto que con $m = 0$ el sistema es homogeneo compatible indeterminado. Resolvemos por Gauss usando las dos primeras ecuaciones y con $z = \lambda$ como parámetro.

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 0 \\ 2x & +y & -z & = 0 \end{array} \right. \overset{z=\lambda}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{rrl} x & +y & = -2\lambda \\ 2x & +y & = +\lambda \end{array} \right. \overset{Ec_2 = Ec_2 - 2Ec_1}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{rrl} x & +y & = -2\lambda \\ & -y & = +5\lambda \end{array} \right. \rightarrow$$

$$y = -5\lambda \qquad x = -2\lambda - (-5\lambda) = 3\lambda$$

$$\text{Solución: } x = 3\lambda \quad y = -5\lambda \quad z = \lambda$$

**Ejercicio 4.-** Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$ y $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde $\alpha$ y $\beta$ son números reales.

**a) [0,75 puntos]** Determina los valores de $\alpha$ y de $\beta$ para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el producto escalar por estos vectores será nulo.

$\vec{w} \cdot \vec{u} = (2, \alpha, \beta) \cdot (1, 2, 3) = 2 + 2\alpha + 3\beta$
$\vec{w} \cdot \vec{v} = (2, \alpha, \beta) \cdot (1, -2, -1) = 2 - 2\alpha - \beta$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{cccc} 2 & +\cancel{2\alpha} & +3\beta & = 0 \\ 2 & -\cancel{2\alpha} & -\beta & = 0 \\ \hline 4 & & +2\beta & = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \beta = -2 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{-2-2}{-2} = 2$$

**b) [0,75 puntos]** Determina los valores de $\alpha$ y de $\beta$ para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

Si $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección tienen que ser proporcionales.

$\vec{w} = k\vec{v} \quad \rightarrow \quad (2, \alpha, \beta) = k(1, -2, -1) \quad \rightarrow \quad 2 = k \quad \alpha = -4 \quad \beta = -2$

**c) [1 punto]** Para $\alpha = 8$, determina el valor de $\beta$ para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el determinante formado por sus componentes tiene que ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & \beta \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-4 - 2\beta + 24) - (2\beta - 12 - 8) = -4\beta + 40$$

$-4\beta + 40 = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = 10$