Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - a)e^x$

a) [1.25 puntos] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - a)e^x = e^x(x + 1 - a)$$

Si tiene un punto crítico en $x = 0$, entonces $f'(0) = 0$, por tanto:

$$e^0(0 + 1 - a) = 0 \quad \to \quad a = 1$$

b) [1.25 puntos] Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

$$a = 1 \quad \to \quad f(x) = (x - 1)e^x \quad \to \quad f'(x) = xe^x$$

$$f''(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (x + 1)e^x$$

Hay puntos de inflexión donde se anula la segunda derivada. Planteamos $f''(x) = 0$.

$$(x + 1)e^x = 0 \quad \to \quad x + 1 = 0 \quad \to \quad x = -1$$

Comprobamos signo de la segunda derivada a los lados del posible punto de inflexión.

$f''(-2) = (-2 + 1)e^{-2} < 0$
$f''(0) = (0 + 1)e^0 > 0$

Puesto que hay cambio de signo hay punto de inflexión en $x = -1$.

$f(-1) = (-1 - 1)e^{-1} = -\frac{2}{e}$

$$\text{Punto de inflexión en } \left(-1, -\frac{2}{e}\right)$$

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-3)$.

a) [1 punto] Esboza el recinto de la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

La función logaritmo tiene una asíntota vertical cuando $x + 2 = 0$, o sea, en $x = -2$. Calculamos sus cortes con los ejes.

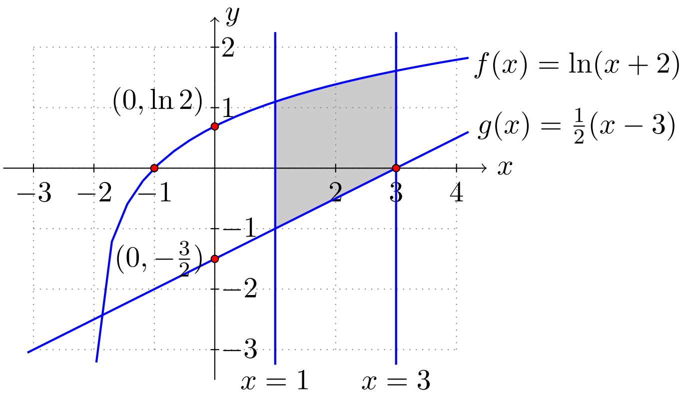
$x = 0 \quad \to \quad y = f(0) = \ln 2 \approx 0,7$
$f(x) = 0 \quad \to \quad 0 = \ln(x+2) \quad \to \quad e^0 = x + 2 \quad \to \quad 1 = x + 2 \quad \to \quad x = -1$

La función g es lineal. Solo necesitamos 2 puntos para esbozarla.

$g(0) = \frac{1}{2}(0-3) = -\frac{3}{2}$
$g(3) = \frac{1}{2}(3-3) = 0$

Nota: Aunque no nos han pedido los puntos de corte con los ejes de f y de g, para un esbozo correcto son necesarios.

Añadimos las rectas $x = 1$ y $x = 3$ y esbozamos las gráficas. La región está sombreada.



b) [1.5 puntos] Determina el área del recinto anterior.

$$A = \int_1^3 (f(x) - g(x))dx = \int_1^3 \left[\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)\right] dx$$

Resolvemos por partes la integral del logaritmo.

$$u = \ln(x+2) \quad du = \frac{1}{x+2}dx \qquad dv = dx \quad v = x$$

$$\int \ln(x+2)dx = x\ln(x+2) - \int x\frac{1}{x+2}dx$$

Realizamos aparte esta última integral racional.

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = x - 2\ln(x+2) + C$$

$$\begin{array}{rr|l} x & & x+2 \\ \cline{3-3} -x & -2 & 1 \\ \cline{1-2} & -2 & \end{array}$$

Por tanto, el área pedida es:

$$A = \int_1^3 \left[\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)\right] dx = \left[x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\right]_1^3 =$$

$$= \left[(x+2)\ln(x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x\right]_1^3 = \left(5\ln 5 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(3\ln 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{5^5}{3^3} - 1 \approx 3,75 \text{ u}^2$$

Ejercicio 3.- [2.5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Desarrollamos la expresión $X^tA = B^t$.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{cccccc} (2-m)x & +y & +mz & = & 2m^2-1 \\ x & +my & +z & = & m \\ (2m-1)x & +y & +z & = & 1 \end{array} \right. \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Hemos escrito la ecuación matricial en forma de sistema de ecuaciones y después reescrito el sistema de nuevo en forma matricial pero en la forma que habitualmente lo conocemos para analizarlo mediante el teorema de Rouché-Fröbenius.

El sistema es equivalente a $A^tX = B$ y podemos discutirlo mediante el teorema de Rouché-Fröbenius. Llamemos M a la matriz de coeficientes del sistema, ($M = A^t$), y M^* a la matriz M ampliada con los términos independientes del sistema.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2m - m^2 + m + 2m - 1) - (2m^3 - m^2 + 2 - m + 1)$$

$$|M| = -2m^3 + 6m - 4 = -2(m^3 - 3m + 2)$$

El rango será 3 cuando el determinante no sea nulo. Resolvemos mediante Ruffini.

$$|M| = 0 \quad \rightarrow \quad -2(m^3-3m+2) = 0 \quad \rightarrow \quad (m-1)^2(m+2) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, $R(M) = 3 = R(M^*)$. Sistema compatible determinado.

Analizamos para $m = 1$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con $m = 1$, al ser todas la filas iguales, $R(M) = R(M^*) = 1$ por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Analizamos para $m = -2$.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya sabemos que $R(M) < 3$. Puesto que el determinante del menor en verde no es cero, el rango de M es 2.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad R(M) = 2$$

Eliminamos la tercera columna en M^* para ver su rango.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-8 + 7 + 10) - (70 - 8 + 1) = -54 \neq 0$$

Por tanto, con $m = -2$ $R(M^*) = 3 \neq R(M)$ y el sistema es incompatible.

Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) [1.25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-1,1,1)$$

$$A = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{|(-3,-2,-1)|}{2} = \frac{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$$

b) [1.25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0,-1,2)\cdot(-1,1,1) = 1$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos(A) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Nota: Ojo. Nos piden el coseno, no el ángulo.