Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad \text{para } x \neq -1$$

a) [1.5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f

Nota: Al ser una función racional, podemos hacer al mismo tiempo los límites en $\pm\infty$. En otros tipos de funciones habria que hacer 2 límites para cada caso, uno hacia $+\infty$ y otro hacia $-\infty$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \overset{\text{IND}}{\left[\frac{\infty}{\pm\infty}\right]} \overset{*}{=} \pm\infty \text{ No hay asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2} : x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4-x(x+1)}{2x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4-x^2-x}{2x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+4}{2x+2} = 1$$

Asíntota oblicua en $y = \frac{1}{2}x + 1$

Asíntotas verticales:

Al ser una función racional, solo puede haber asíntotas verticales donde se anule el denominador.

$$2x+2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=-1$$

Comprobamos que efectivamente es una asíntota.

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{(-1)^2+3(-1)-4}{2(-1)+2} = \frac{-7}{0} = \pm\infty$$

Efectivamente hay asíntota vertical en $x=-1$, (no se ha estudiado el posicionamiento).

---

* *Grado del numerador superior al grado del denominador.*

b) [1.5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

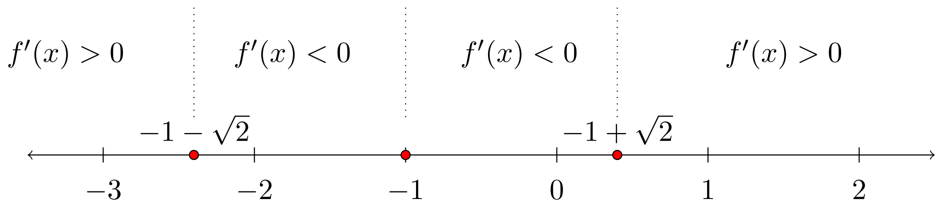
$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad \text{para } x \neq -1$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+2)-(x^2+3x+4)(2)}{(2x+2)^2} = \frac{4x^2+4x+6x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+4x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x-1=0$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$$

Posibles extremos en $x=-1\pm\sqrt{2}$. Función no definica en $x=-1$. Comprobamos signo de la derivada en cada intervalo.



$$f'(-3) = \frac{2(-3)^2+4(-3)-1}{(2(-3)+2)^2} > 0$$

$$f'(-2) = \frac{2(-2)^2+4(-2)-1}{(2(-2)+2)^2} < 0$$

$$f'(0) = \frac{2\cdot 0^2+4\cdot 0-1}{(2\cdot 0+2)^2} < 0$$

$$f'(1) = \frac{2\cdot 1^2+4\cdot 1-1}{(2\cdot 1+2)^2} > 0$$

f decrece en $(-1-\sqrt{2},-1)\cup(-1,-1+\sqrt{2})$

f crece en $(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},\infty)$

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Sea la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Datos:

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx \qquad F(1) = 1 \qquad e^x = t$$

$$e^x = t \quad \Rightarrow \quad e^x dx = dt \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{t}$$

$$\frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t)+Bt}{t(1-t)}$$

$$t = 0 \ \Rightarrow \ 1 = A \qquad t = 1 \ \Rightarrow \ 2 = B$$

$$\int \frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{2}{1-t}dt = \ln t + \frac{2}{-1}\ln|1-t| + k = \ln t - 2\ln|1-t| + k$$

Deshacemos el cambio de variable y con ayuda del punto determinamos k.

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \ln e^x - 2\ln|1-e^x| + k = x - 2\ln|1-e^x| + k$$

$$F(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cancel{1} - 2\ln|1-e^1| + k = \cancel{1} \quad \Rightarrow \quad k = 2\ln|1-e|$$

$$F(x) = x - 2\ln|1-e^x| + 2\ln|1-e|$$

Nota: Aplicando propiedades de los logaritmos esta función queda mejor expresada como $F(x) = x + \ln\left(\dfrac{1-e}{1-e^x}\right)^2$*, aunque el resultado anterior probablemente será dado como válido por el examinador.*

Ejercicio 3.- [2.5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: Necesitamos crear y resolver ecuaciones para nuestras cuatro incognitas, a, b, c y d. La primera ecuación nos la da el mismo enunciado.

$$a + d = 1$$

Nota: Las siguientes ecuaciones se obtienen desarrollando la expresión $AX = XA$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

$$AX = XA \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} -c & = & b & \Rightarrow & b = -c \\ -d & = & -a & \Rightarrow & a = d \\ a & = & d & \Rightarrow & a = d \\ b & = & -c & \Rightarrow & b = -c \end{array}$$

Estas cuatro ecuaciones se resumen en 2. $\quad a = d; \quad b = -c.$

Nota: Obtenemos la última ecuación desarrollando el determinante.

$$|X| = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad ad - bc = 1$$

Esta última ecuación no es lineal y por tanto no podemos usar las técnicas matriciales conocidas para su análisis. Lo resolvemos con las ecuaciones obtenidas.

$a + d = 1$ junto con $a = d$ nos lleva a $a + a = 1 \to a = \frac{1}{2} \to d = \frac{1}{2}$

$b = -c$ junto con $ad - bc = 1$, al conocer ya el valor de a y d nos lleva a $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - (-c)c = 1$

$\frac{1}{4} + c^2 = 1 \to c^2 = 1 - \frac{1}{4} \to c^2 = \frac{3}{4} \to c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \to b = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por tanto hay 2 soluciones a la matriz X:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

a) [1.25 puntos] Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

Determinamos los planos mediatrices π_{M1} y π_{M2} que nos dan los puntos del espacio que se encuentran a la misma distancia de π_1 y π_2. Sea P un punto genérico de los planos mediatrices su distancia a π_1 será la misma a la distancia a π_2, por tanto $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$

Nota: Este mismo párrafo, muchos más sintetizado sería: Sean π_{M1} y π_{M2} los planos mediatrices a π_1 y π_2 y sea P un punto que cumple $P \in \pi_{M1}$ y $P \in \pi_{M2}$, entonces $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$

$$\frac{|1x + 0y + 0z + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|0x + 1y + 0z + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} \to |x| = |y| \to \begin{array}{lcl} x = y & \to & \pi_{M1} \equiv x - y = 0 \\ x = -y & \to & \pi_{M2} \equiv x + y = 0 \end{array}$$

Las intersecciones de los planos mediatrices con la recta r son los puntos buscados.

Nota: Para las intersecciones ponemos la recta en paramétricas, obtenemos los λ y los sustituimos en la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \pi_{M1} \cap r \to (2 - \lambda) - (2 + 3\lambda) = 0 \to \lambda_1 = 0 \\ \pi_{M2} \cap r \to (2 - \lambda) + (2 + 3\lambda) = 0 \to 4 + 2\lambda = 0 \to \lambda_2 = -2 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 0 \to x = 2;\ y = 2;\ z = 1; \qquad \lambda_2 = -2 \to x = 4;\ y = -4;\ z = -1;$$

Los puntos son $P_1(2, 2, 1)$ y $P_2(4, -4, -1)$.

b) [1.25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Llamemos s a la recta intersección entre π_1 y π_2. Si los vectores directores de r, s y un vector de cualquier punto de r a s son linealmente dependientes las rectas o se cortan o son coincidentes.

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{c} P_s(0, 0, 0) \\ \overrightarrow{v_s} = (0, 0, 1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} P_r(2, 2, 1) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1, 3, 1) \end{array} \qquad \overrightarrow{P_sP_r} = (2, 2, 1)$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{v_s} \\ \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{P_sP_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \neq 0 \to \text{Vectores independientes}$$

Puesto que los vectores son linealmente independientes, las rectas o son paralelas o se cruzan. Al no ser proporcionales $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ no pueden ser paralelas, por tanto las rectas se cruzan.

Nota: Este apartado podría haberse resuelto también poniendo la recta r en forma explícita y analizando los rangos de las 4 ecuaciones formadas por las 2 rectas, aunque el procedimiento sería un poco más largo.