Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, es exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos deber ser mayor o igual que la mitad de kilogramos de cocentrado B.

a) (1.75 puntos) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

Llamemos x a el número de kilogramos producidos del concentrado de tipo A e y a el número de kilogramos producidos de concentrado del tipo B. Hacemos una tabla con los datos y extraemos las inecuaciones del sistema.

	$x \equiv A$	$y \equiv B$	Total
Colombia	4.5	7.5	67.5
Etiopía	3.0		30.0
Costa Rica		1.5	9.0

$$4.5x + 7.5y \leq 67.5 \quad \rightarrow \quad 3x + 5y \leq 45$$
$$3x \leq 30 \quad \rightarrow \quad x \leq 10$$
$$1.5y \leq 9 \quad \rightarrow \quad y \leq 6$$
$$x \geq \frac{y}{2} \quad \rightarrow \quad 2x \geq y$$
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$3x + 5y = 45$

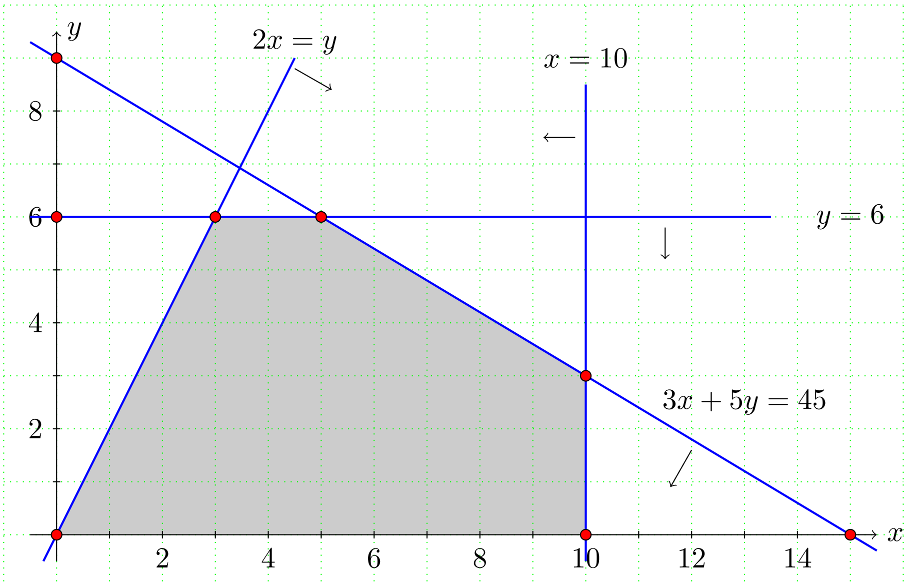
x	y
0	9
15	0
10	3
5	6

$3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \leq 45$

$2x = y$

x	y
0	0
3	6

$2 \cdot 1 \geq 0$



Vértices en $(0,0)$ $(3,6)$ $(5,6)$ $(10,3)$ y $(10,0)$

b) (0.25 puntos) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

Para que sea posible tienen que cumplirse todas las restricciones con $x = 7$ e $y = 5$.

$3 \cdot 7 + 5 \cdot 5 \leq 45 \quad \rightarrow \quad 21 + 25 \leq 45 \quad \rightarrow \quad 46 \not\leq 45$ No se cumple.
$7 \leq 10$
$5 \leq 6$
$2 \cdot 7 \geq 5$

Puesto que una de las 4 restricciones no se cumple no seria posible producir dichas cantidades.

c) (0.5 puntos) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo del concentrado del tipo A es 2 euros y cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Función objetivo: $f(x, y) = 2x + 4y$

$f(0, 0) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$
$f(3, 6) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 30$
$f(5, 6) = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 34$
$f(10, 3) = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 3 = 32$
$f(10, 0) = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 0 = 20$

Hay que fabricar 5 kg del concentrado del tipo A y 6 kg del concentrado del tipo B por un valor de 34€.

Ejercicio 2.- De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) (1 punto) Estudie los intervalos del crecimiento y decrecimiento f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

Ya tenemos la derivada. Sus puntos críticos están donde $f'(x) = 0$. Los buscamos.

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos $(-\infty, -1),\ (-1, 1),\ (1, \infty)$.

$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$.
$f'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 < 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es decreciente en $(-1, 1)$.
$f'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es creciente en $(1, \infty)$.

Tiene un máximo relativo de abscisa $x = -1$, (pasa de crecer a decrecer).
Tiene un mínimo relativo de abscisa $x = 1$, (pasa de decrecer a crecer).

b) (0.75 puntos) Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos $(-\infty, 0),\ (0, \infty)$.

$f''(-1) = 6(-1) < 0 \quad \rightarrow \quad f$ es cóncava en $(-\infty, 0)$
$f''(1) = 6 \cdot 1 > 0 \quad \rightarrow \quad f$ es convexa en $(0, \infty)$

f tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$, (su curvatura cambia en $x = 0$).

c) (0.75 puntos) Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1, 3)$.

$$f(x) = \int f'(x)dx \quad \rightarrow \quad f(x) = \int (3x^2 - 3)dx = \frac{3x^3}{3} - 3x + k = x^3 - 3x + k$$

$$f(-1) = 3 \quad \rightarrow \quad (-1)^3 - 3(-1) + k = 3 \quad \rightarrow \quad -1 + 3 + k = 3 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

Solución: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Ejercicio 3.- De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que

$$P(A \cap B) = 0.2 \qquad P(A \cup B) = 0.4 \qquad P(A/B) = 0.8$$

a) (1.2 puntos) Calcule $P(B)$ y $P(A)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \rightarrow \quad P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \rightarrow \quad P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$P(A) = 0.4 - 0.25 + 0.2 = 0.35$$

b) (0.5 puntos) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta

A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.35 \cdot 0.25 = 0.0875 \end{array}\right\} 0.2 \neq 0.0875 \quad \rightarrow \quad \text{no son independientes.}$$

c) (0.8 puntos) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Aplicando leyes de Morgan: $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

Ejercicio 4.-Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) (1.5 puntos) Para un nivel de confianza del 92% calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

$p = 22\% = 0.22 \quad q = 1 - 0.22 = 0.78$

$1 - \alpha = 0.92 \qquad \alpha = 0.08 \qquad Z_{\alpha/2} = |Z_{0.04}| = Z_{0.96} = 1.75$

$$I.C. = \left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \left(0.22 - 1.75\sqrt{\frac{0.22 \cdot 0.78}{50}}, 0.2 + 1.75\sqrt{\frac{0.22 \cdot 0.78}{50}}\right) =$$

$$I.C. = (0.1614, 0.2786)$$

b) (1 punto) Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hopitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3%.

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \rightarrow \quad n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot pq = \left(\frac{1.75}{0.03}\right)^2 \cdot 0.22 \cdot 0.78 \approx 583.9$$

Mínimo: 584 expedientes.