Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Se consideran la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:
1) $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.
2) $A \cdot A^t + B$ posee inversa.

Una matriz es simétrica siempre que sus elementos cumplan que $a_{ij} = a_{ji}$.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es cierto que la matriz $A \cdot A^t$ es simétrica puesto que $a_{11} = a_{11} = 5;\ a_{12} = a_{21} = -1;\ a_{21} = a_{12} = -1;\ a_{22} = a_{22} = 2$

Una matriz posee inversa siempre que su determinante no sea nulo.

$$A \cdot A^t + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot A^t + B| = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Es falso que la matriz posea inversa puesto que su determinante es nulo.

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$

$$B \cdot X + A = C \quad \rightarrow \quad B \cdot X = C - A \quad \rightarrow \quad \cancel{B^{-1}B} \cdot X = B^{-1}(C - A) \quad \rightarrow \quad X = B^{-1}(C - A)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adj(B^t) \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C - A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}(C - A) = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\cancel{6}} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \cancel{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x-1)^2 + 1$, con $0 \leq x \leq 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) [1 punto] Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

$C(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$C(x) = 2(2x-1)^2 + 1 = 2(4x^2 - 4x + 1) + 1 = 8x^2 - 8x + 3$

$C'(x) = 16x - 8$

$C'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 16x - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$. Punto crítico en $x = \frac{1}{2}$

Examinamos signo de la derivada en los intervalos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$C'\left(\frac{1}{10}\right) = 16 \cdot \frac{1}{10} - 8 < 0 \quad \rightarrow \quad C(x)$ decrece en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$C'(1) = 16 - 8 > 0 \quad \rightarrow \quad C(x)$ crece en $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

b) (0.75 puntos) Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

La función pasa de decrecer a crecer en el entorno de $x = \frac{1}{2}$, por lo que ahí tenemos un mínimo. Tendremos que observar también los extremos de la función, (aunque en este caso estén necesariamente por encima).

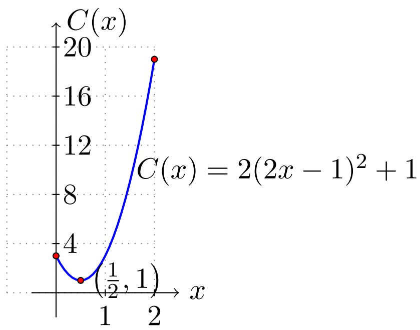
$C(0) = 2(2 \cdot 0 - 1)^2 + 1 = 3$
$C\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)^2 + 1 = 1$
$C(2) = 2(2 \cdot 2 - 1)^2 + 1 = 19$

Habrá que producir medio millón de kilogramos por un coste de 1 unidad.

c) (0.75 puntos) Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

Se trata de una parábola definida en $0 \leq x \leq 2$, con vértice en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(2, 19)$.

El esbozo está a la derecha.



Ejercicio 3.- Una marca de patinetes eléctricos fabrica 3 modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25% de su producción, el B el 40% y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos 3 meses de su venta, se comprobó que el 15% de los patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

$A \equiv$ modelo A. $B \equiv$ modelo B $C \equiv$ modelo C. $V \equiv$ averiado.

$P(A) = 0'25$
- $P(V/A) = 0'15 \longrightarrow P(A \cap V) = P(A) \cdot P(V/A) = 0'25 \cdot 0'15 = 0'0375$
- $P(\bar{V}/A) = 0'85 \longrightarrow P(A \cap \bar{V}) = P(A) \cdot P(\bar{V}/A) = 0'25 \cdot 0'85 = 0'2125$

$P(B) = 0'40$
- $P(V/B) = 0'10 \longrightarrow P(B \cap V) = P(B) \cdot P(V/B) = 0'40 \cdot 0'10 = 0'04$
- $P(\bar{V}/B) = 0'90 \longrightarrow P(B \cap \bar{V}) = P(B) \cdot P(\bar{V}/B) = 0'40 \cdot 0'90 = 0'36$

$P(C) = 0'35$
- $P(V/C) = 0'12 \longrightarrow P(C \cap V) = P(C) \cdot P(V/C) = 0'35 \cdot 0'12 = 0'042$
- $P(\bar{V}/C) = 0'88 \longrightarrow P(C \cap \bar{V}) = P(C) \cdot P(\bar{V}/C) = 0'35 \cdot 0'88 = 0'308$

$$P(V) = P(A)\cdot P(V/A) + P(B)\cdot P(V/B) + P(C)\cdot P(V/C) = 0'0375 + 0'04 + 0'042 = 0'1195 \equiv 11'95\%$$

b) (0.5 puntos) Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

Buscamos $P(\bar{V}/A) = \dfrac{P(A \cap \bar{V})}{P(A)} = \dfrac{0'2125}{0'25} = 0'85 \equiv 85\%$.

c) (1 punto) Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

Buscamos $P(V \cup C) = P(V) + P(C) - P(V \cap C) = 0'1195 + 0'35 - 0'042 = 0'4275 \equiv 42'75\%$

Ejercicio 4.- Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es de 35 puntos.

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza, Para la puntuación media de los participantes de dicho concurso.

$\overline{x} = 35 \qquad \sigma^2 = 36 \qquad \sigma = 6 \qquad 1-\alpha = 0'92 \qquad \alpha = 0'08 \qquad Z_{\alpha/2} = |Z_{0'04}| = Z_{0'96} = 1'75$

$$I.C. = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(35 - 1'75\frac{6}{\sqrt{64}}, 35 + 1'75\frac{6}{\sqrt{64}}\right) = (33'6875, 36'31250)$$

b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98%.

$E = 2 \qquad 1-\alpha = 0'98 \qquad \alpha = 0'02 \qquad Z_{\alpha/2} = |Z_{0'01}| = Z_{0'99} = 2'327$

Nota: Se ha obtenido $Z_{\alpha/2} = 2'327$ por interpolación. $2'33$ también sería válido.

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad n = \left(Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2'327 \cdot \frac{6}{2}\right)^2 \approx 48'7$$

Tamaño mínimo: 49 participantes.