Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) [0.5 puntos] Razone si la matriz A es simétrica.

Una matriz es simétrica siempre que sus elementos cumplan que $a_{ij} = a_{ji}$.

La matriz A no es simétrica puesto que $a_{23} = -1 \neq a_{32} = 1$

b) [1 punto] Calcule A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2) - (-1+4) = -1 \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -(-2) & 2 \\ -(-2) & 1 & -(-1) \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nota: También podría haberse calculado por el método de Gauss-Jordan o mediante 3 sistemas de 9 ecuaciones.

c) [1 punto] Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0$

$$2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2X \cdot A = A^2 + 3I_3 \quad \rightarrow \quad X \cdot \cancel{A \cdot A^{-1}} = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) [1 punto] Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

Comprobamos la continuidad de cada tramo.

$\dfrac{1}{x-1}$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, pero $1 > 0$, por lo que $\dfrac{1}{x-1}$ es continua en su dominio.

$x^2 + a$ es polinómica y por tanto es continua en su dominio.

Planteamos la continuidad en $x = 0$.

$f(0) = 0^2 + a = a \qquad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{-1} = -1 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + a) = a$

Por tanto, $a = -1$.

Estudiamos ahora la derivabilidad con $a = -1$.

$f_1(x) = \dfrac{1}{x-1} \quad f_1'(x) = \dfrac{0 \cdot (x-1) - 1 \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

$\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ es continua excepto en $x = 1$ pero $x = 1$ no pertenece a su dominio, por tanto $\dfrac{-1}{(x-1)^2}$ es continua en su dominio.

$2x$ es continua en su dominio por ser lineal.

Queda comprobar si $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(0-1)^2} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$

Puesto que $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ la funcion no es derivable en $x = 0$.

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) (1 punto) Para $a = -2$ estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Podemos ver que la primera derivada no depende de a. Hacemos la segunda derivada para estudiar la curbatura.

$$f_1'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \quad f''_1(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - (-1) \cdot 2(x-1) \cdot 1}{((x-1)^2)^2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$\dfrac{2}{(x-1)^3}$ está definida en su dominio, (hay una posible discontinuidad en $x = 1$ pero esta abcisa no pertenece a su dominio). Si planteamos $f''(x) = 0$ no obtenemos soluciones. $\dfrac{2}{(x-1)^3} \neq 0$ para todo x, y por supuesto $2 \neq 0$ para todo x. Al ser una función a trozos la curbatura puede cambiar en torno al 0, por tanto, estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

$f''(-1) = \dfrac{2}{(-1-1)^3} < 0 \to f(x)$ concava en $(-\infty, 0)$

$f''(1) = 2 > 0 \to f(x)$ convexa en $(0, \infty)$

Ejercicio 3.- El 69% de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que vea series o películas

$S \equiv$ ver series. $\quad P \equiv$ ver películas.

$P(S) = 0,69 \qquad P(P) = 0,35 \qquad P(\overline{S} \cap \overline{P}) = P(\overline{S \cup P}) = 0,18$

$S \cup P \equiv$ ver series o películas.

$P(S \cup P) = 1 - P(\overline{S \cup P}) = 1 - 0,18 = 0,82$

b) (1 punto) Sabiendo que ve series, calcula probabilidad de que vea películas.

Buscamos $P(P/S) = \dfrac{P(P \cap S)}{P(S)}$.

$P(S \cup P) = P(S) + P(P) - P(S \cap P) \quad \rightarrow \quad P(S \cap P) = P(S) + P(P) - P(S \cup P)$

$P(S \cap P) = 0,69 + 0,35 - 0,82 = 0,22$

$P(P/S) = \dfrac{P(P \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,22}{0,69} = \dfrac{22}{69}$.

c) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Buscamos $P(S \cap \overline{P}) = P(S) - P(S \cap P) = 0,69 - 0,22 = 0,47$

Ejercicio 3.- Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleado en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica de 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de la empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos.

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) (1.5 puntos) Determine el intervalo de confianza al 92% para la media poblacional

$$\overline{x} = \frac{10+17+8+27+6+9+32+5+21}{9} = 15$$

$1-\alpha = 0'92 \qquad \alpha = 0'08 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'04} = Z_{0'96} = 1'75$

$$I.C. = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(15 - 1'75\frac{8}{\sqrt{15}}, 15 + 1'75\frac{8}{\sqrt{15}}\right) = (11'39, 18'61)$$

b) (1 punto) Con una confianza del 95'5%, ¿que tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferios a 1'5 minutos?

$1-\alpha = 0'955 \qquad \alpha = 0'045 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'0225} = Z_{0'9775} = 2'005$

Nota: Tomar el valor de $Z_{\alpha/2} = 2'00$ probablemente también será tomado como válido por el examinador En ese caso se obtendrían 114 empleados.

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2'005\frac{8}{1'5}\right)^2 \approx 114'3$$

Tamaño muestral mínimo: 115 empleados.