Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- a) (2.5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliester. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Llamemos x a el número de camisetas lisas e y a el número de camisetas estampadas. Hacemos una tabla con los datos y extraemos las inecuaciones del sistema.

	x	y	
Algodón	70	60	4200
Poliéster	20	10	800

$70x + 60y \leq 4200 \quad \rightarrow \quad 7x + 6y \leq 420$

$20x + 10y \leq 800 \quad \rightarrow \quad 2x + y \leq 80$

$y \geq 10 \qquad 2y \geq x \qquad x \geq 0$

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$7x + 6y = 420$

x	y
0	70
60	0

$2x + y = 80$

x	y
0	80
40	0

$2y = x$

x	y
0	0
100	50

$$\begin{cases} 2y = x \\ 2x + y = 80 \end{cases}$$

$4y + y = 80$

$5y = 80$

$y = \frac{80}{5} = 16$

$x = 2 \cdot 16 = 32$

$$\begin{cases} 7x + 6y = 420 \\ 2x + y = 80 \end{cases}$$

$y = 80 - 2x$

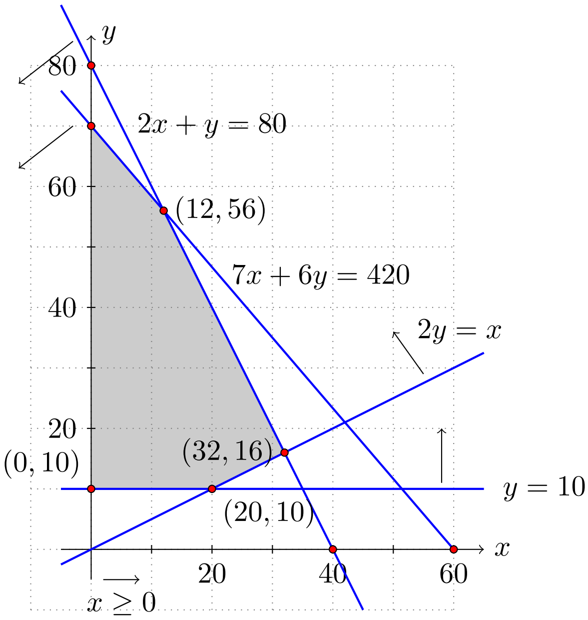
$7x + 6(80 - 2x) = 420$

$7x + 480 - 12x = 420$

$-5x = -60$

$x = 12$

$y = 80 - 2 \cdot 12 = 56$



Vértices: $(0, 10)$ $(0, 70)$ $(12, 56)$ $(32, 16)$ $(20, 10)$

Función objetivo: $f(x, y) = 5x + 4y$

$f(0, 10) = 4 \cdot 10 = 40$

$f(0, 70) = 4 \cdot 70 = 280$

$f(12, 56) = 5 \cdot 12 + 4 \cdot 56 = 284$

$f(32, 16) = 5 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 224$

$f(20, 10) = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 140$

Hay que fabricar 12 camisetas lisas y 56 estampadas. El beneficio obtenido es de 284€.

Ejercicio 2.- Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$

a) (1 punto) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

Estas rectas tendrán de pendiente 3, por tanto $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = 3x^2 - 9 \qquad f'(x) = 3 \quad \to \quad 3x^2 - 9 = 3 \quad \to \quad x^2 = \frac{3+9}{3} = 4 \quad \to \quad x = \pm 2$$

$$\begin{array}{lll} f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2 + 2 = -8 & y - (-8) = 3(x - 2) \quad \to & y = 3x - 14 \\ f(-2) = (-2)^3 - 9 \cdot (-2) + 2 = 12 & y - 12 = 3(x - (-2)) \quad \to & y = 3x + 18 \end{array}$$

b) (1 punto) Estudie la monotonía y curvatura de la función f.

$$f'(x) = 3x^2 - 9 \qquad f''(x) = 6x$$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede haber cambios de monotonía y curbatura cuando las derivadas se anulen.

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 3x^2 - 9 = 0 \quad \to \quad x^2 = \tfrac{9}{3} = 3 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Estudiamos el signo de la primera derivada en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3}),\ (-\sqrt{3}, \sqrt{3}),\ (\sqrt{3}, \infty)$

$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 9 > 0$
$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 9 < 0$
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 9 > 0$

$f(x)$ crece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
$f(x)$ decrece en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$$f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos $(-\infty, 0),\ (0, \infty)$

$f''(-1) = -6 < 0 \quad \to \quad f(x)$ es concava en $(-\infty, 0)$
$f''(1) = 6 > 0 \quad \to \quad f(x)$ es convexa en $(0, \infty)$

Nota: Puesto que no se han pedido expresamente extremos ni puntos de inflexión no se han analizado, aunque algunos profesores de instituto indican que es obligatorio.

c) (0.5 puntos) Calcule $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 9x + 2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + K$$

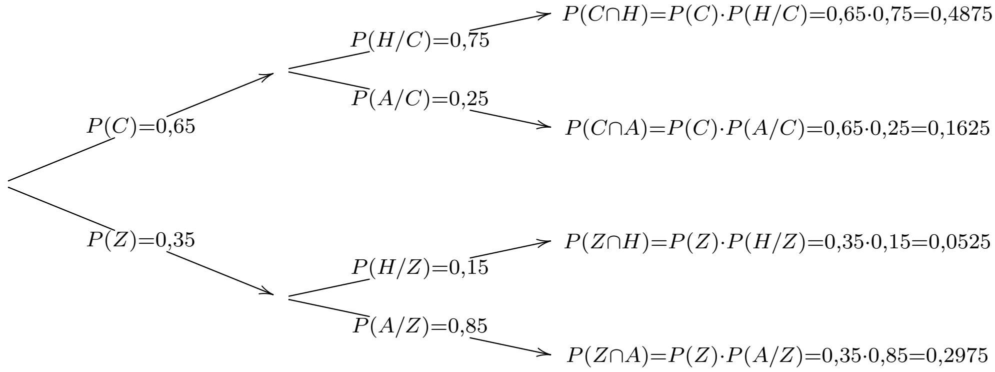
Ejercicio 3.- El 65% de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75% de los turistas que se hospedan en la capital y el 15% de los que se hospedan en las zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

$C \equiv$ en la capital. $Z \equiv$ en zonas rurales. $H \equiv$ en hoteles. $A \equiv$ en apartamentos.

$P(C) = 0,65$ $P(Z) = 1 - P(C) = 1 - 0,65 = 0,35$ $P(H/C) = 0,75$ $P(H/Z) = 0,15$

$P(A/C) = 1 - P(H/C) = 1 - 0,75 = 0,25$ $P(A/Z) = 1 - P(H/C) = 1 - 0,15 = 0,85$



$$P(H) = P(C) \cdot P(H/C) + P(Z) \cdot P(H/Z) = 0,4875 + 0,0525 = 0,54 \equiv 54\%$$

Nota: Aunque no es obligatorio, puesto que nos han dado los datos en porcentaje les damos las respuestas también en porcentaje.

b) (1 punto) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Buscamos $P(Z/A) = \dfrac{P(Z \cap A)}{P(A)}$.

$P(A) = 1 - P(H) = 1 - 0,54 = 0,46$

$$P(Z/A) = \frac{P(Z \cap A)}{P(A)} = \frac{0,2975}{0,46} \approx 0,647 \equiv 64,7\%.$$

Ejercicio 4.- Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partido político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.
a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 97% para la proporción de individuos que piensan votar a ese partido en dicha ciudad.

$$p = \frac{135}{300} = 0,45 \quad q = 1 - 0,45 = 0,55$$

$$1 - \alpha = 0'97 \qquad \alpha = 0'03 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'015} = Z_{0'985} = 2'17$$

$$I.C. = \left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \left(0,45 - 2'17\sqrt{\frac{0,45\cdot 0,55}{300}}, 0,45 + 2'17\sqrt{\frac{0,45\cdot 0,55}{300}}\right) =$$

$$I.C. = (0'3877, 0'5123)$$

b) (1 punto) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y para el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \rightarrow \quad n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot pq = \left(\frac{2,17}{0,02}\right)^2 \cdot 0,45\cdot 0,55 \approx 2913,6$$

Tamaño muestral mínimo: 2914 individuos.