Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule $A^{2018} + A^{2019}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I$$

Para n par, $A^n = I$. Para n impar, $A^n = A$.

$$A^{2018} + A^{2019} = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + B \cdot B^t = 2A$

Despejamos la matriz X.

$$X \cdot A + B \cdot B^t = 2A \quad \rightarrow \quad X \cdot A = 2A - B \cdot B^t \quad \rightarrow \quad X \cdot \cancel{A \cdot A_1} = (2A - B \cdot B^t) \cdot A^{-1}$$

$$|A| = -1 \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = (2A - B \cdot B^t) \cdot A^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara a lo largo de 50 años viene dado por la expresión $B(t) = \begin{cases} -0.04t^2 + 2.4t & 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & 40 \le t \le 50 \end{cases}$ donde t es el tiempo transcurrido.

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $B(t)$ en el intevalo $[0, 50]$.

En $0 \le t < 40$ la función $-0.04t^2 + 2.4t$ es continua por ser polinómica.

La función $\dfrac{40t - 320}{t}$ es continua excepto en $t = 0$, pero $0 \notin [40, 50]$, por tanto es continua en su dominio.

Nos queda ver si $B(t)$ es continua en $t = 40$.

$$B(40) = \frac{40 \cdot 40 - 320}{40} = 32$$

$$\lim_{t \to 40^-} B(t) = \lim_{t \to 40} (-0.04t^2 + 2.4t) = -0.04 \cdot 40^2 + 2.4 \cdot 40 = 32$$

$$\lim_{t \to 40^+} B(t) = \lim_{t \to 40} \frac{40t - 320}{t} = \frac{40 \cdot 40 - 320}{40} = 32$$

Puesto que $\lim_{t \to 40} B(t) = 32 = B(40)$, la función es continua en $t = 40$ y por tanto también en $[0, 50]$.

Pasamos a comprobar la derivabilidad.

$$\left(\frac{40t - 320}{t} \right)' = \frac{40 \cdot t - (40t - 320) \cdot 1}{t^2} = \frac{320}{t^2}$$

$$B'(t) = \begin{cases} -0.08t + 2.4 & 0 < t < 40 \\ \dfrac{320}{t^2} & 40 < t < 50 \end{cases}$$

Cada tramo es continuo en su dominio, (es segundo no es continuo en $t = 0$, pero $0 \notin (40, 50)$, por lo que es continuo en su dominio). Comprobamos si es derivable en $t = 40$.

$$\lim_{t \to 40^-} B'(t) = \lim_{t \to 40} (-0.08t + 2.4) = -0.08 \cdot 40 + 2.4 = -0,8$$

$$\lim_{t \to 40^+} B'(t) = \lim_{t \to 40} \frac{320}{t^2} = \frac{320}{40^2} = 0,2$$

Puesto que $\lim_{t \to 40^-} B'(t) \neq \lim_{t \to 40^+} B'(t)$, la función $B(t)$ no es derivable en $t = 40$. Por tanto, $B(t)$ es derivable en $(0, 40) \cup (40, 50)$. No podemos decir que la función sea derivable en $t = 0$ ni en $t = 50$ puesto que para ello tendria que estar definida a la izquierda del 0 y a la derecha de 50, pero no lo está.

b) (1 punto) Estudie la monotonía de la función $B(t)$ y determine en que momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

$$B(t) = \begin{cases} -0.04t^2 + 2.4t & 0 \leq t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & 40 \leq t \leq 50 \end{cases} \qquad B'(t) = \begin{cases} -0.08t + 2.4 & 0 < t < 40 \\ \dfrac{320}{t^2} & 40 < t < 50 \end{cases}$$

Para la monotonía creamos intervalos en el dominio de la función, los puntos en los que se anula la derivada y $t = 40$.

$B'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad -0.08t + 2.4 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{2.4}{0.08} = 30$

$B'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{320}{t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 320 = 0 \cdot t^2$ Sin solución.

Intervalos: $(0, 30)$, $(30, 40)$, $(40, 50)$

$B'(1) = -0.08 + 2.4 > 0$. En $(0, 30)$ la función crece.

$B'(35) = -0.08 \cdot 35 + 2.4 < 0$. En $(30, 40)$ la función decrece.

$B'(45) = \dfrac{320}{45^2} > 0$. En $(40, 50)$ la función crece.

Para obtener el beneficio máximo calculamos los beneficios de $B(t)$ en los extremos del dominio de definición, donde se anula la derivada, $(t = 30)$, y en $t = 40$.

$B(0) = -0.04 \cdot 0^2 + 2.4 \cdot 0 = 0$

$B(30) = -0.04 \cdot 30^2 + 2.4 \cdot 30 = 36$

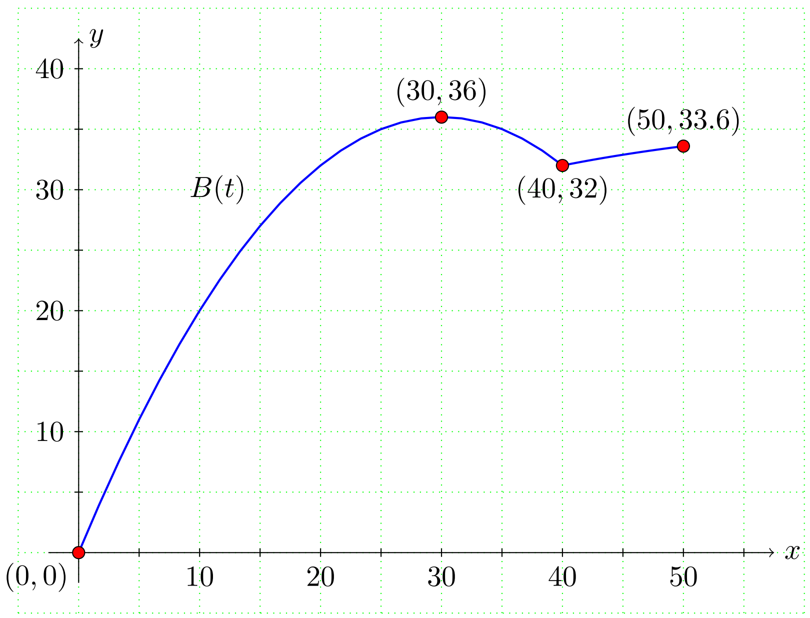
$B(40) = \dfrac{40 \cdot 40 - 320}{40} = 32$

$B(50) = \dfrac{40 \cdot 50 - 320}{50} = 33.6$

La almazara obtiene el máximo beneficio en $t = 30$ por un valor de 36 mil euros.

c) (0.5 puntos) Represente gráficamente la función y explique la evolución del beneficio.

Se trata de una función continua definida en $[0, 50]$ formada por dos tramos, parte de una parábola con vértice en $(30, 36)$ y parte de una función inversa. Analizando monotonía y puntos de la función obtenidos en los apartados anteriores vemos que el único punto de corte con los ejes es en el origen. Procedemos a representarla.



Evolución: El beneficio de la empresa crece desde $t = 0$ hasta $t = 30$, empezando por 0€ y hasta un máximo de 36000€. Entre $t = 30$ y $t = 40$, el beneficio disminuye hasta los 32000€. Tras esto vuelve a remontar hasta los 33600€ en $t = 50$.

Ejercicio 3.- Un hotel dispone de tres lavadoras industriales, L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavador defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado del hotel.

a) (1.5 puntos) Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

$D \equiv$ lavado defectuoso. $L_1 \equiv$ lavado en L_1. $L_2 \equiv$ lavado en L_2. $L_3 \equiv$ lavado en L_3.

$P(L_1) = 0,5 \quad P(L_2) = 0,3 \quad P(L_3) = 0,2 \quad P(D/L_1) = 0,05 \quad P(D/L_2) = 0,15 \quad P(D/L_3) = 0,2$

$P(D) = P(L_1) \cdot P(D/L_1) + P(L_2) \cdot P(D/L_2) + P(L_3) \cdot P(D/L_3)$

$P(D) = 0,5 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,11$

$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,11 = 0,89$

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1 sabiendo que ha sido defectuoso.

$$P(L_1/D) = \frac{P(L_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(L_1) \cdot P(D/L_1)}{P(D)} = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,11} = \frac{5}{22}$$

Ejercicio 4.- La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa, obteniéndose las siguentes edades

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40

a) (1.5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza para estimar la edad media de los empleados con un nivel de confianza del 97%.

$$\bar{x} = \frac{30+42+38+45+52+60+21+26+33+44+28+49+37+41+38+40}{16} = \frac{624}{16} = 39$$

$\sigma^2 = 64 \qquad \sigma = 8 \qquad 1-\alpha = 0'97 \qquad \alpha = 0'03 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'015} = Z_{0'985} = 2'17$

$$I.C. = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(39 - 2'17\frac{8}{\sqrt{16}}, 39 + 2'17\frac{8}{\sqrt{16}}\right) = (34'66, 43'34)$$

b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y un nivel de confianza del 99%.

$1-\alpha = 0'99 \qquad \alpha = 0'01 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'005} = Z_{0'995} = 2'575$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad n = \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2'575 \cdot \frac{8}{2}\right)^2 = 106'09$$

Mínimo 107 empleados.