Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \leq 11 \qquad x \geq 2y - 5 \qquad 3x + y \leq 18 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

a) (1.8 puntos) Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$x + 2y = 11$

x	y
0	5,5
11	0

$0+2\cdot 0 \leq 11$

$x = 2y - 5$

x	y
0	2,5
-5	0

$0 \geq 2 \cdot 0 - 5$

$3x + y = 18$

x	y
0	18
6	0

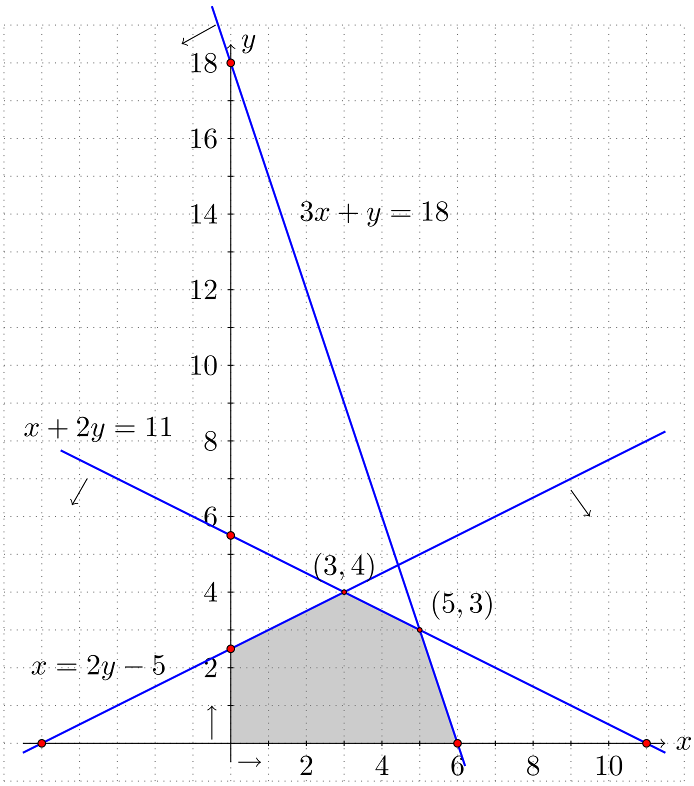
$3\cdot 0+0 \leq 18$

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x = 2y - 5 \end{cases}$$

$2y - 5 + 2y = 11$
$4y = 16$
$y = 4$
$x = 2 \cdot 4 - 5 = 3$

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x + y = 18 \end{cases}$$

$x = 11 - 2y$
$3(11 - 2y) + y = 18$
$33 - 6y + y = 18$
$-5y = -15$
$y = 3$
$x = 11 - 2 \cdot 3 = 5$



b) (1 punto) Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

Vértices: $(0, 0)$ $(6, 0)$ $(5, 3)$ $(3, 4)$ $(0, 2'5)$
Función objetivo: $F(x, y) = 2x + 3y$

$f(0, 0) = 0$
$f(6, 0) = 2 \cdot 6 = 12$
$f(5, 3) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19$
$f(3, 4) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$
$f(0, 2'5) = 3 \cdot 2'5 = 7'5$

Mínimo en $(0, 0)$ de valor 0. Máximo en $(5, 3)$ de valor 19.

c) (0.2 puntos) Justifique si el punto $(5.5, 2)$ pertenece a la región factíble.

Para pertenecer a la región factible debe cumplir todas las inecuaciones.

$x + 2y \leq 11 \quad \rightarrow \quad 5.5 + 2 \cdot 2 = 9.5 \leq 11$ Cierto
$x \geq 2y - 5 \quad \rightarrow \quad 5.5 \geq 2 \cdot 2 - 5 = -1$ Cierto
$3x + y \leq 18 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot 5.5 + 2 = 18.5 \leq 18$ Falso
$x \geq 0 \quad \rightarrow \quad 5.5 \geq 0$ Cierto
$y \geq 0 \quad \rightarrow \quad 2 \geq 0$ Cierto

Puesto que no se cumple una de las inecuaciones, el punto no pertenece a la región factible.

Ejercicio 2.- El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$, para $0 \leq t \leq 12$, donde t representa el tiempo.

a) (0.8 puntos) ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuantas toneladas se consumen en ese momento?

La función $c(t)$ es continua por ser polinómica. Se alcanzará su máximo en un punto donde $f'(x) = 0$ o en sus extremos.

$c'(t) = 3t^2 - 30t + 63 \qquad c'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 3t^2 - 30t + 63 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 - 10t + 21 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 4}{2} = \begin{cases} t_1 = 7 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$c(0) = 0^3 - 15 \cdot 0^2 + 63 \cdot 0 + 10 = 10$
$c(3) = 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 63 \cdot 3 + 10 = 91$
$c(7) = 7^3 - 15 \cdot 7^2 + 63 \cdot 7 + 10 = 59$
$c(12) = 12^3 - 15 \cdot 12^2 + 63 \cdot 12 + 10 = 334$

Se alcanza en $t = 12$ con un consumo de 334 toneladas.

b) (0.7 puntos) ¿En que intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?

Decrece cuando la derivada es negativa. Creamos intervalos en su dominio cuando la derivada se anula.$(0, 3)$, $(3, 7)$ y $(7, 12)$.

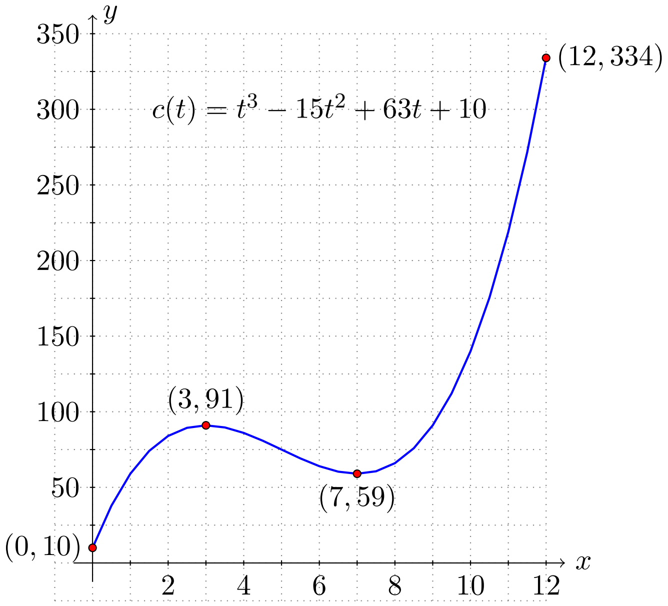
$c'(1) = 3 \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 + 63 > 0$. En $(0, 3)$ la función crece.
$c'(4) = 3 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4 + 63 < 0$. En $(3, 7)$ la función decrece.
$c'(8) = 3 \cdot 8^2 - 30 \cdot 8 + 63 > 0$. En $(7, 12)$ la función crece.

La función decrece en el intervalo $(3, 7)$.

c) (1 punto) Represente gráficamente la función.

La función es continua, polinómica, de tercer grado, definida en $(0,12)$, con extremos en $(3,91)$ y $(7,59)$. La monotonía está calculada en el apartado anterior. Empieza en $(0,10)$ y termina en $(12,334)$. Colocando estos puntos en una gráfica se ve que no va a cortar el eje x, y el corte con el eje y lo tenemos en $(0,10)$, por lo que no es necesario calcular puntos de corte con los ejes. Procedemos a representarla.

Nota: Es cierto que me he pasado en las explicaciones. Que es continua por ser polinómica y que no tiene cortes con el eje x al menos si es necesario comentarlo.



Ejercicio 3.- En una localidad, el 25% de los habitantes asiste periodicamente a la consulta del dentista, el 10% se hace una analítica y el 8% hace ambas cosas. **a) (0.5 puntos)** Razone si los sucesos “Asistir a la consulta del dentista” y “Hacerse una analítica” son independientes.

$C \equiv$ asistir a la consulta. $\qquad A \equiv$ hacerse una analítica.

$P(C) = 0,25 \qquad P(A) = 0,10 \qquad P(C \cap A) = 0,08$

Los sucesos son independientes si $P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A)$.

$P(C \cap A) = 0,08$. $P(C) \cdot P(A) = 0,25 \cdot 0,10 = 0,025 \neq 0,08$.

Por tanto, los sucesos no son independientes.

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de habitantes no se hace ni una analítica ni va al dentista?

Sea $\bar{C} \cap \bar{A} = \overline{C \cup A}$ el suceso no hacer analítica ni ir al dentista.

$P(\bar{C} \cap \bar{A}) = P(\overline{C \cup A}) = 1 - P(C \cup A)$

$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = 0,25 + 0,1 - 0,08 = 0,27$

$P(\bar{C} \cap \bar{A}) = 1 - P(C \cup A) = 1 - 0,27 = 0,73$

El porcentaje es del 73%

c) (1 punto) Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que no van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

Buscamos $P(A/\bar{C}) = \dfrac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$

$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) = 0,1 - 0,08 = 0,02$

$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,25 = 0,75$

$P(A/\bar{C}) = \dfrac{0,02}{0,75} = \dfrac{2}{75}$

Ejercicio 4.- En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción del alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

a) (1.2 puntos) Determine el intervalo de confianza al 97% para la proporción de este alumnado que lleva el móvil al instituto. ¿Entre que dos porcentajes varía esa proporción a ese nivel de confianza?

$p = \dfrac{74}{121} \quad q = 1 - \dfrac{74}{121} = \dfrac{47}{121}$

$1 - \alpha = 0'97 \qquad \alpha = 0'03 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'015} = Z_{0'985} = 2'17$

$$I.C. = \left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \right) = \left(\frac{74}{121} - 2'17\sqrt{\frac{\frac{74}{121}\cdot\frac{47}{121}}{121}}, \frac{74}{121} - 2'17\sqrt{\frac{\frac{74}{121}\cdot\frac{47}{121}}{121}} \right) =$$

$$I.C. = (0'5154, 0'7077)$$

Varía entre el 51,54% y el 70,77%.

b) (0.5 puntos) Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿que efecto tendra esta disminución en el error de estimación?

El error se calcula como $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$. Una disminución en el nivel de confianza implica una disminución en el valor de $Z_{\alpha/2}$, lo que implicará una disminución en el error de estimación.

c) (0.8 puntos) Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿cuantos alumnos de cada centro se deben tomar para constituir la muestra?

$1 + 2 + 3 = 6$

Primer centro: $1 \cdot \frac{121}{6} \approx 20,2 \quad \rightarrow \quad$ 20 alumnos.

Segundo centro: $2 \cdot \frac{121}{6} \approx 40,3 \quad \rightarrow \quad$ 40 alumnos.

Tercer centro: $121 - 20 - 40 = 61$ alumnos.