Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde ln denota logaritmo neperiano.

[1,5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y $x = 2$.

Datos: $f'(1) = 0 \qquad f'(2) = 0$

$$f'(x) = a\frac{1}{x} + 2bx + 1$$

$$f'(1) = a\frac{1}{1} + 2b(1) + 1 = a + 2b + 1 \qquad f'(1) = 0 \quad \to \quad a + 2b + 1 = 0$$

$$f'(2) = a\frac{1}{2} + 2b(2) + 1 = \frac{a}{2} + 4b + 1 \qquad f'(2) = 0 \quad \to \quad \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 1 = 0 \\ \dfrac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a + 2b = -1 \\ \dfrac{a}{2} + 4b = -1 \end{cases} \xrightarrow{(-2)\cdot Ec2} \begin{cases} \cancel{+a} + 2b = -1 \\ \cancel{-a} - 8b = +2 \end{cases} \to \quad \begin{array}{l} b = -\frac{1}{6} \\ a = -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Solución: } a = -\frac{2}{3} \qquad b = -\frac{1}{6}$$

b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

Usaremos el signo de la segunda derivada para determinarlo. Sustituimos $a = -\frac{2}{3}$ y $b = -\frac{1}{6}$.

Nota: También podríamos hacerlo viendo si la función crece o decrece a izquierda y derecha de cada punto mediante la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1 = -\frac{2}{3x} + 2(-\tfrac{1}{6})x + 1 = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1$$

$$f''(x) = -\frac{0\cdot 3x - 2\cdot 3}{9x^2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{6}{9x^2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

$$f''(1) = \frac{2}{3\cdot 1^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo.}$$

$$f''(2) = \frac{2}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo.}$$

Solución: Minimo en $x = 1$ Máximo en $x = 2$

Ejercicio 2.- Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-2x}$

a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.

En este punto, $f'(x) = -2e$

$f'(x) = -2e^{-2x}$

$f'(x) = -2e \quad \to \quad \cancel{-2}e^{-2x} = \cancel{-2}e \quad \to \quad e^{-2x} = e^1 \quad \to \quad -2x = 1 \quad \to \quad x = -\frac{1}{2}$

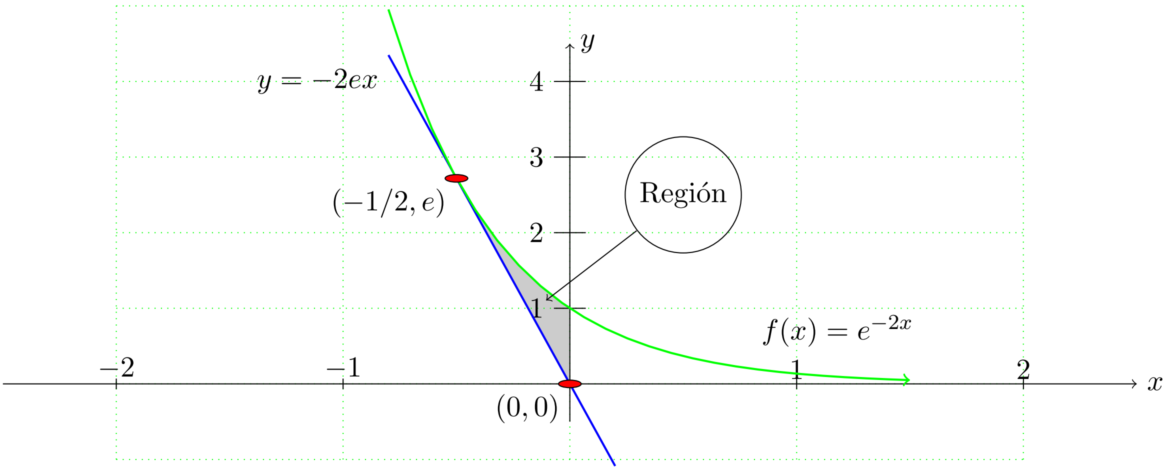
Nota: Nos han pedido un punto. Necesitamos la coordenada y.

$f(-\frac{1}{2}) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = e$

Solución: Punto $\left(-\frac{1}{2}, e\right)$

b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.

Nota: La función e^{-2x} es prácticamente igual a la función e^x girada respecto al eje y. La recta pasa por $\left(-\frac{1}{2}, e\right)$ y por $(0,0)$. El eje de ordenadas es el eje y. Solo hay que representarla.



Ojo: La escala del eje x es tres veces mayor a la del eje y para facilitar la visión del recinto en esta gráfica.

c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

El recinto está delimitado entre las funciones e^{-2x} y $-2ex$ entre $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[e^{-2x} - (-2ex)\right] dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{2ex^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \left[ex^2 - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \left(0 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{e}{4} - \frac{e}{2}\right) = \frac{e}{4} - \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +mz & = m^2 \\ & y & -z & = m \\ x & +my & +z & = m \end{array}\right.$$

a) [1.5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

Sea C la matríz de coeficientes del sistema y A la matriz ampliada, las determinaos y analizamos sus rangos.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad |C| = (1+0-1)-(m-m+0) = 0 \quad \rightarrow \quad Rg(C) < 3$$

Nos fijamos ahora en el menor indicado en la matriz. $C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} m \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & m \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg(C) \geq 2.$

Por tanto $Rg(C) = 2$ y el sistema nunca es compatible determinado independientemente del valor de m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & m \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}$$

Puesto que en C las columnas 1 y 2 nos daban un menor no nulo, eliminamos la columna 3 en A y analizamos rangos para discutir el sistema.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = (m+0+m)-(m^2+m^2+0) = 2m-2m^2 = 2m(1-m)$$

Por tanto, $Rg(A) = 3$ para $m \neq 0$ y $m \neq 1$. En estos casos, como $Rg(C) = 2$ es diferente de $Rg(A) = 3$, el sistema es incompatible.

Para $m = 0$ y $m = 1$, $Rg(A) = Rg(C) = 2 <$ número de incognitas y el sistema es compatible indeterminado.

c) [1 punto] Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

Sabemos que el sistema es compatible indeterminado que depende de un parámetro, (incognitas - rango)$= 3 - 2 = 1$.

Puesto que tenemos un menor no nulo formado por primera y segunda columna de la primera y segunda ecuaciones, determinamos a z como parámetro: $z = \lambda$ y descartamos la tercera ecuación. Con $m = 1$, el sistema se nos convierte en:

$$\left\{\begin{array}{cccl} x & +y & +z & = 1 \\ & y & -z & = 1 \end{array}\right. \qquad z = \lambda \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccl} x & +y & = 1 - \lambda \\ & y & = 1 + \lambda \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad x = 1 - \lambda - (1 + \lambda) = -2\lambda$$

$$\text{Solución:} \quad x = -2\lambda \quad y = 1 + \lambda \quad z = \lambda.$$

Si $z = 2 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2$. Por tanto: $x = -4, \quad y = 3, \quad z = 2$.

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z \qquad \text{y} \qquad s \equiv \left\{\begin{array}{r} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{array}\right.$$

a) [1,5 puntos] Halla los valores de m y n para los que r y s se cortan perpendicularmente.

Sea $P_r(1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{V_r} = (2, m, 1)$ un punto y un vector director de r. Buscamos P_s y V_s, un punto y un vector director de la recta s.

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \quad y = -3 \qquad P_s(-2, -3, 0)$$

$$\overrightarrow{V_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -ni + j + k \equiv (-n, 1, 1)$$

Si $\overrightarrow{V_r} \cdot \overrightarrow{V_s} = 0$ las rectas son perpendiculares.

$$\overrightarrow{V_r} \cdot \overrightarrow{V_s} = 0 \quad \rightarrow \quad (2, m, 1) \cdot (-n, 1, 1) = 0 \quad \rightarrow \quad m - 2n + 1 = 0$$

Si el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_s}$ los 3 vectores estarán en el mismo plano y las rectas se cortarán.

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-2, -3, 0) - (1, -1, 0) = (-3, -2, 0)$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ V_r \\ V_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3m + 2n + 0) - (0 - 3 - 4) = -3m + 2n + 7$$

Resolvemos el sistema dado por las 2 condiciones:

$$\left\{\begin{array}{rrl} m & \cancel{-2n} & +1 = 0 \\ -3m & \cancel{+2n} & +7 = 0 \\ \hline -2m & & +8 = 0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad m = 4 \quad n = \frac{5}{2}$$

b) [1 punto] Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a r y a s.

Con $m = 3$ y $n = 1$, los vectores $\overrightarrow{V_r} = (2, m, 1)$ y $\overrightarrow{V_s} = (-n, 1, 1)$ se convierten en $\overrightarrow{V_r} = (2, 3, 1)$ y $\overrightarrow{V_s} = (-1, 1, 1)$.

Comprobamos que efectivamente se cortan. Para ello, los vectores $\overrightarrow{V_r}$, $\overrightarrow{V_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$ deben ser combinación lineal. Ya sabemos que:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ V_r \\ V_s \end{vmatrix} = -3m + 2n + 7 = -3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 7 = 0$$

Por tanto, efectivamente, las dos rectas se cortan.

Con los dos vectores $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_s}$ y un punto de una de las rectas, por ejemplo $P_r(1, -1, 0)$, podemos determinar el plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(x-1) - (y+1) + 2z - (x-1) - 2(y+1) + 3z = 2x - 3y + 5z - 5$$

$$\text{Plano: } 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$