Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}(x)} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

Datos: Si $f(x)$ es continua, $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\qquad f'(-1) = 0 \qquad f'(-2) = 2$

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}(x)} = \frac{e^0 - e^{-0} - 2\cdot 0}{0 - \operatorname{sen} 0} = \overset{\text{IND}}{\left[\frac{0}{0}\right]}$$

Aplicamos L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}(x)} = \overset{\text{IND}}{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \overset{\text{IND}}{\left[\frac{0}{0}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1 - 1}{\operatorname{sen} 0} = \overset{\text{IND}}{\left[\frac{0}{0}\right]} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{1 + 1}{\cos 0} = \frac{2}{1} = 2$$

$f(0) = c \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = c \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2 \quad \to \quad c = 2$

Si $x < 0$, $f'(x) = 2ax + b$

$f'(-1) = 0 \quad \to \quad -2a + b = 0$
$f'(-2) = 2 \quad \to \quad -4a + b = 2$

Resolvemos el sistema:

$b = 2a \quad \to \quad -4a + (2a) = 2 \quad \to \quad -2a = 2 \quad \to \quad a = -1 \quad \to \quad b = -2$

Solución: $a = -1 \qquad b = -2 \qquad c = 2$

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la función f definida por $f(x) = ax\ln x - bx$ para $x > 0$, (ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que

$$\int_1^2 f(x)dx = 8\ln 2 - 9$$

Datos:

$$f'(1) = 0 \qquad \int_1^2 f(x)dx = 8\ln 2 - 9$$

$$f'(x) = a\ln x + a\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} - b = a\ln x + a - b; \qquad f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad a - b = 0$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 ax\ln x dx - \int_1^2 bxdx$$

La primera integral la efectuamos por partes. La segunda es inmediata.

$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}dx \quad dv = axdx \quad v = \frac{ax^2}{2}$

$$\int_1^2 ax\ln x dx = \left[\frac{ax^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{ax^2}{2}\frac{1}{x}dx = \left[\frac{ax^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \frac{a}{2}\int_1^2 xdx = \left[\frac{ax^2}{2}\ln x - \frac{ax^2}{4}\right]_1^2 =$$
$$= (2a\ln 2 - a) - \left(\tfrac{a}{2}\ln 1 - \tfrac{a}{4}\right) = 2a\ln 2 - \tfrac{3}{4}a$$

$$\int_1^2 bxdx = \left[\frac{bx^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}$$

Nota: También podrían haberse hecho las integrales indefinidas y después sustituir, etcétera.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 ax\ln x dx - \int_1^2 bxdx = 2a\ln 2 - \frac{3}{4}a - \frac{3b}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx = 8\ln 2 - 9 \quad \rightarrow \quad 2a\ln 2 - \frac{3}{4}a - \frac{3b}{2} = 8\ln 2 - 9 \quad \rightarrow \quad a = 4$$

De la condición del máximo en $x = 1$ dedujimos que $a - b = 0$ o que $a = b$, por tanto $b = 4$.

Si las condiciones son compatibles, $-\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}b = -9$; $\qquad -\frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{3}{2}\cdot 4 = -9$. Por tanto:

Solución: $a = 4 \quad b = 4$

Ejercicio 3.- [2.5 puntos] Considera las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0.75 puntos] Determina, si existen, los valores de a, b y c para los que las matrices A y B conmutan.

Nota: Calculamos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ y creamos ecuaciones para que conmuten.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad b = 0 \quad -b = 0 \quad c = -1$$

Solución: $\quad a = 0 \quad b = 0 \quad c = -1.$

b) [1 punto] Calcula A^2, A^3, A^{2017} y A^{2018}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_3 \cdot A = A \quad \rightarrow \quad A^{\text{par}} = I_3 \qquad A^{\text{impar}} = A$$

$$A^{2017} = A^{\text{impar}} = A$$

$$A^{2018} = A^{\text{par}} = I_3$$

c) [0.75 puntos] Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (-1 + 0 + 0) = 1$$

Determinante no nulo, por tanto matriz regular o inversible. Si tiene inversa.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto concuerda con lo visto en el apartado **b)**, si $A^2 = A \cdot A = I$ y $I = A^{-1} \cdot A \quad \rightarrow \quad A^{-1} = A$

Nota: Este último comentario no es obligatorio, aunque demuestra algo coherente con el apartado anterior y por tanto es correcto ponerlo aquí.

Ejercicio 4.- Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{array} \right.$$

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de r y s.

Sea $P_r(-1,0,-1)$ y $\overrightarrow{V_r} = (2,1,3)$ un punto y un vector director de r, buscamos un punto y un vector director de la recta s.

$$z = 0 \quad \to \quad y = -1 + 2 \cdot 0 = -1 \quad \to \quad x = \frac{-5 + 3 \cdot (-1)}{2} = -4 \quad \to \quad P_s(-4,-1,0)$$

$$\overrightarrow{V_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6i + 4j + 2k \equiv (6,4,2) \equiv (3,2,1)$$

Puesto que $\overrightarrow{V_r} = (2,1,3)$ y $\overrightarrow{V_s} = (3,2,1)$ no son proporcionales, las rectas ni son paralelas ni son coincidentes.

Si el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ es combinación lineal de $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_s}$ los 3 vectores estarán en el mismo plano y las rectas se cortarán. En caso contrario se cruzarán.

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-4,-1,0) - (-1,0,-1) = (-3,-1,1)$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ V_r \\ V_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3 + 4 - 9) - (3 - 18 - 2) = 9 \neq 0$$

Por tanto, las rectas se cruzan.

Nota: También podria haberse resuelto creando un vector genérico $\overrightarrow{P_rP_s}$ y planteando perpendicularidad a $\overrightarrow{V_r}$ y $\overrightarrow{V_s}$. En caso de que en el siguiente apartado nos hubiesen pedido la recta común o las intersecciones de esa recta con r y s sería lo más inteligente. Si nos piden la distancia como en este caso esta puede calcularse con una fórmula como veremos a continuación.

b) [1.5 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

$$\left| \overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s} \right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5i + 7j + 1k \equiv (-5,7,1)$$

$$d(r,s) = \frac{\left| \left| \overrightarrow{P_rPs}, \overrightarrow{V_r}, \overrightarrow{V_s} \right| \right|}{\left| \overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s} \right|} = \frac{|9|}{|(-5,7,1)|} = \frac{9}{\sqrt{(-5)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{75}} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \text{ u}$$