Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es derivable.

$f(1) = 3 - k \cdot 1^2 = 3 - k$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3 - kx^2) = 3 - k \cdot 1^2 = 3 - k$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{kx} = \dfrac{2}{k}$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \quad \to \quad 3 - k = \frac{2}{k} \quad \to \quad 3k - k^2 = 2 \quad \to \quad k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Con $k = 1$ o $k = 2$, $f(x)$ es continua.

$$f'(x) = \begin{cases} -2kx & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{-2}{kx^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-2kx) = -2k$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2}{kx^2} = -\dfrac{2}{k}$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) \quad \to \quad -2k = -\frac{2}{k} \quad \to \quad k^2 = \frac{-2}{-2} \quad \to \quad k = \pm 1$$

Con $k = -1$, f parece derivable, pero como no es continua si $k = -1$, tampoco es derivable. Sin embargo, con $k = 1$, f es continua y derivable.

Solución: $k = 1$

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3 - x^2$ y $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$.

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

$f(1) = 3 - 1^2 = 2 \qquad f'(x) = -2x \qquad f'(1) = -2$

$y - f(y_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \to \quad y - 2 = -2(x - 1) \quad \to \quad$ Recta tangenge: $y = -2x + 4$

Buscamos los posibles puntos de intersección de la recta tangente con $g(x)$.

$$-2x + 4 = -\frac{x^2}{4} \quad \to \quad -8x + 16 = -x^2 \quad \to \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$$

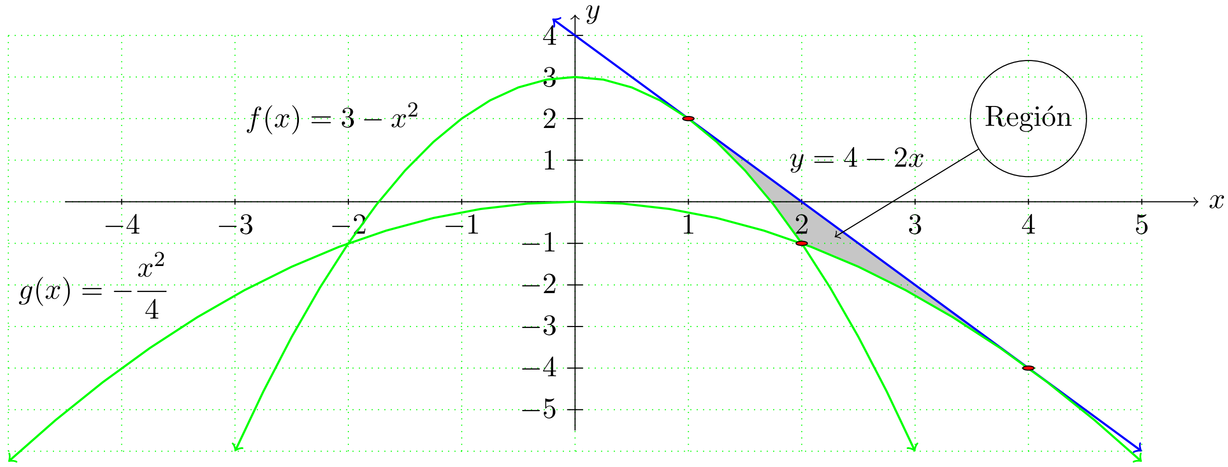
Si en $x = 4$, la pendiente de $g(x)$ coincide con la de $y = -2x + 4$, (o sea, es -2), $-2x + 4$ también será tangente a $g(x)$.

$g'(x) = -\dfrac{2x}{4} = -\dfrac{x}{2} \qquad g'(4) = -\dfrac{4}{2} = -2$. Por tanto también es tangenge a $g(x)$.

$g(4) = -\dfrac{4^2}{4} = -4$. Por tanto el punto de tangencia es $(4, -4)$.

b) [0.75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

Se trata de una recta y dos parábolas. Ya sabemos que la recta pasa por los puntos de tangencia $(1, 2)$ y $(4, 4)$. Las dos parábolas tienen el vértice en $x = 0$, ya que en ambas $b = 0$. Sus cortes con los ejes son: $\quad 3 - x^2 = 0 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{3} \qquad -\frac{x^2}{4} = 0 \quad \to \quad x = 0$



Queda por calcular el corte entre f y g.

$$f(x) = g(x) \quad \to \quad 3 - x^2 = -\frac{x^2}{4} \quad \to \quad 12 - 4x^2 = -x^2 \quad \to \quad 12 = 3x^2 \quad \to \quad x = \pm 2$$

$f(2) = 3 - 2^2 = -1$. Se cortan en $(2, -1)$.

c) [0.75 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

$$A_t = A_1 + A_2 = \int_1^2 \left[(4-2x) - (3-x^2)\right] dx + \int_2^4 \left[(4-2x) - (-\frac{x^2}{4})\right] dx =$$

$$= \int_1^2 (1 - 2x + x^2) dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) dx = \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 =$$

$$= \left[\left(2 - 4 + \frac{8}{3}\right) - \left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right)\right] + \left[\left(\frac{64}{12} - 16 + 16\right) - \left(\frac{8}{12} - 4 + 8\right)\right] = 1 \text{ u}^2$$

Ejercicio 3.-

[1.5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de $34,50$ euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
- se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
- tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

Sea x el número de monedas de 50 céntimos, y el número de monedas de 1 euro y z el número de monedas de 2 euros, planteamos el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

$$\begin{array}{l} 0,5x + y + 2z = 34,5 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + z \end{array} \quad \overset{Ec_1 = 2\cdot Ec_1}{\equiv} \quad \begin{array}{rrrcr} x & +2y & +4z & = & 69 \\ x & +y & +z & = & 30 \\ -x & +y & -z & = & 0 \end{array}$$

Sea C la matriz de coeficientes del sistema y A la matriz ampliada, determinamos rangos mediante determinantes y menores. para discutir el sistema.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Rg(C) \geq 2$ puesto que dado el menor formado por $F1, F2, C1, C2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \neq 0$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+4+2) - (-4+1-2) = 10 \neq 0$$

Por tanto el $Rg(C) = 3$. El $Rg(A)$ también será 3 y por tanto el sistema es compatible determinado y en principio tiene solución. Hay que comprobar que esa solución sea entera resolviendo el sistema, lo cual haremos aplicando el método de Gauss a la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 0 & -1 & -3 & -39 \\ 0 & 3 & 3 & 69 \end{pmatrix} \overset{F_3 + 3F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 69 \\ 0 & -1 & -3 & -39 \\ 0 & 0 & -6 & -48 \end{pmatrix}$$

$$-6z = -48 \quad \to \quad z = 8 \qquad -y - 3z = -39 \quad \to \quad y = 15 \qquad x + 2y + 4z = 69 \quad \to \quad x = 7$$

El problema tiene una única solución con 8 monedas de 2 euros, 15 de 1 euro y 7 de 50 céntimos.

b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

El nuevo sistema y sus matrices asociadas serán:

$$\begin{array}{l} 0,5x + y + 2z = 35 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + z \end{array} \overset{Ec_1 = 2 \cdot Ec_1}{\equiv} \begin{array}{rrrcr} x & +2y & +4z & = & 70 \\ x & +y & +z & = & 30 \\ -x & +y & -z & = & 0 \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes no ha cambiado y su rango sigue siendo 3. El rango de la matriz ampliada no puede ser mayor a 3, por tanto: $Rg(C) = Rg(A) = 3 \quad \to \quad SCD$ y el sistema tiene solución única.

Buscamos la solución nuevamente por el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 3 & 3 & 70 \end{pmatrix} \overset{F_3 + 3F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 0 & -6 & -50 \end{pmatrix}$$

$$-6z = -50 \quad \to \quad z = \frac{25}{3} \qquad -y - 3z = -40 \quad \to \quad y = 15 \qquad x + 2y + 4z = 70 \quad \to \quad x = \frac{20}{3}$$

Puesto que los resultados no son enteros y no podemos tener fracciones de monedas no podemos efectuar el pago de los 35 euros bajo estas condiciones.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x+2y+z=5$.

a) [1,75 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de π.

Determinamos la recta r perpendicular a π y que contiene a P. El vector normal de π será el vector director de r.

$$\overrightarrow{V_r} = \pi_n = (3,2,1) \qquad r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

La intersección entre π y r es el punto medio, (M), entre P y su simétrico, (S).

$$\pi \equiv 3x+2y+z=5 \quad \rightarrow \quad 3(2+3\lambda)+2(-1+2\lambda)+(3+\lambda)=5 \quad \rightarrow \quad 14\lambda=-2 \quad \rightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{7}$$

$$M = \left(2+3\cdot\left(-\tfrac{1}{7}\right)\ ,-1+2\cdot\left(-\tfrac{1}{7}\right)\ ,3+\left(-\tfrac{1}{7}\right)\right) = \left(\tfrac{11}{7},-\tfrac{9}{7},\tfrac{20}{7}\right)$$

Puesto que M es el punto medio entre P y S, usamos la fórmula del punto medio para despejar las coordenadas de S.

$$\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right) = \left(\frac{S_x+2}{2},\frac{S_y-1}{2},\frac{S_z+3}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_x=\frac{8}{7} \quad S_y=-\frac{11}{7} \quad S_z=\frac{19}{7}$$

$$\text{Simétrico: } \left(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7}\right)$$

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia de P y π.

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|3\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot 3-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}\ \text{u}$$