Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y la gráfica de f pasa por el punto $(1, 1)$.

Datos: Si tiene derivada nula en $x = 1$, $f'(1) = 0$. Si no es extremo relativo en $x = 1$, $f''(1) = 0$. Si pasa por $(1, 1)$, $f(1) = 1$.

$f(1) = 1 \quad \to \quad \cancel{1^3} + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = \cancel{1} \quad \to \quad a + b + c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$f'(1) = 0 \quad \to \quad 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \quad \to \quad 2a + b = -3$

$f''(x) = 6x + 2a$
$f''(1) = 0 \quad \to \quad 6 \cdot 1 + 2a = 0 \quad \to \quad 2a = -6 \quad \to \quad a = -3$

Por tanto:

$b = -3 - 2a = -3 - 2 \cdot (-3) = 3 \qquad c = -a - b = -(-3) - 3 = 0$

Solución: $a = -3 \qquad b = 3 \qquad c = 0$

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

a) [1,25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

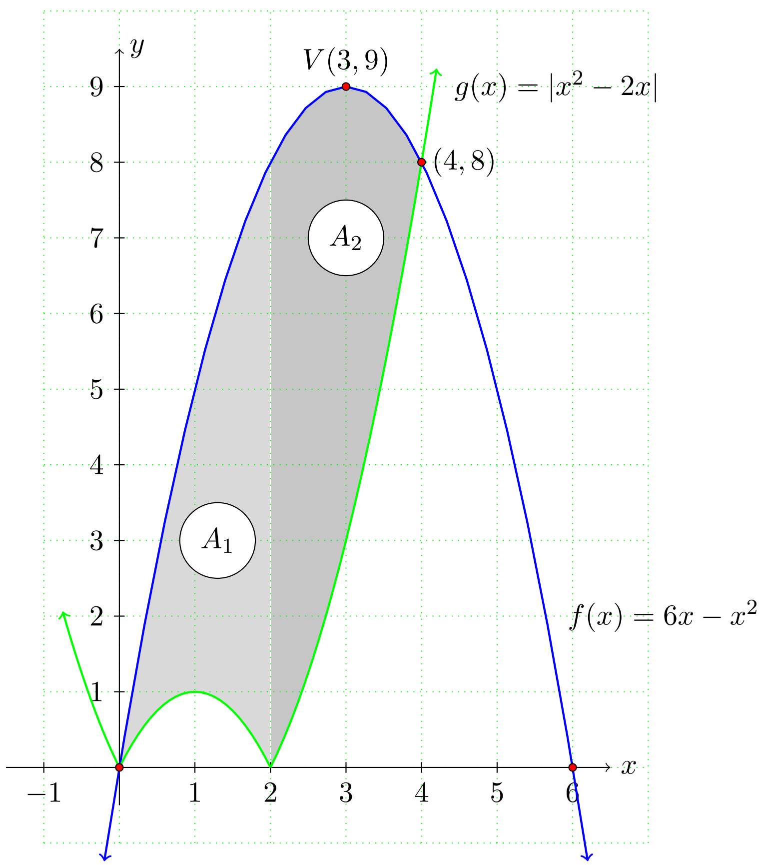
$f(x)$ es una parábola invertida. $f(x) = 6x - x^2 = x(6 - x)$ Corta a los ejes en $(0, 0)$ y en $(6, 0)$.

Vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3 \qquad y_v = f(3) = 6 \cdot 3 - 3^2 = 9$

$g(x)$ es una parábola en valor absoluto o función a trozos. $x^2 - 2x = x(x - 2)$, por lo que cambia de comportamiento en $x = 0$ y $x = 2$. Puesto que $a = 1 > 0$, la parábola es negativa entre $x = 0$ y $x = 2$ y ahí es donde debemos cambiarle el signo.

$$g(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Representamos ambas gráficas:



Las gráficas se cortan en $(0,0)$, puesto que $f(0) = 6 \cdot 0 - 0^2 = 0$ y $g(0) = |0^2 - 2 \cdot 0| = 0$.

El otro punto de corte parece el $(4,8)$. Procedemos al cálculo exacto.

En $x = 4$, $x > 2$ y por tanto $g(x) = x^2 - 2x$. Igualamos a $f(x)$ y resolvemos.

$$x^2 - 2x = 6x - x^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x(x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0;\ x = 4$$

$f(4) = 6 \cdot 4 - 4^2 = 8$. Las gráficas se cortan en $(0,0)$ y en $(4,8)$.

b) [1.25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

$$A_t = A_1 + A_2 = \int_0^2 \left[(6x - x^2) - (-x^2 + 2x)\right] dx + \int_2^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] dx =$$

$$= \int_0^2 4x dx + \int_2^4 (8x - 2x^2) dx = \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_2^4 = \left[2x^2\right]_0^2 + \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_2^4 =$$

$$= 8 - 0 + \left(64 - \frac{128}{3}\right) - \left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{56}{3}\ \mathrm{u}^2$$

Ejercicio 3.- [2.5 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & +2y & +(m+3)z & = & 3 \\ x & +y & z & = & 3m \\ 2x & +4y & 3(m+1)z & = & 8 \end{array} \right.$$

a) [1.75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro m.

Sea C la matriz de coeficentes del sistema y A la matriz ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & (m+3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & (m+3) & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3(m+1) & 8 \end{pmatrix}$$

Determinamos rangos mediante determinantes y menores.

$Rg(C) \geq 2$ puesto que dado el menor formado por $F1, F2, C1, C2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \neq 0$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (m+3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{vmatrix} = 3(m+1) + 4(m+3) + 4 - 2(m+3) - 6(m+1) - 4 = 3 - m$$

Por tanto el $Rg(C) = 3$ siempre que $m \neq 3$. El $Rg(A)$ también será 3 y por tanto con $m \neq 3$ el sistema es compatible determinado.

Con $m = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $Rg(A) \geq 2$ por el menor formado por las filas y columnas 1 y 2. Sustituimos la tercera columna por la columna de terminos independientes y calculamos el determinante para ver el rango.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = (8 + 12 + 36) - (6 + 36 + 16) = -2 \neq 0$$

Con $m = 3$, $Rg(C) = 2$ y $Rg(A) = 3$, por tanto el sistema es incompatible.

b) [0,75 puntos] Resuelve el sistema para $m = -2$

Resolvemos por Gauss sustituyendo $m = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\binom{F_2=F_2-F_1}{F_3=F_3-2F1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Del sistema equivalente podemos deducir que $-5z = 2 \quad \rightarrow \quad z = -\frac{2}{5}. \qquad -y = -9 \quad \rightarrow \quad y = 9.$

$x = 3 - 2y - z = 3 - 2 \cdot 9 - (-\frac{2}{5}) = -\frac{73}{5}$

$$\text{Solución: } x = -\frac{73}{5} \qquad y = 9 \qquad z = -\frac{2}{5}$$

Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por

$$x-5=y=\frac{z+2}{-2}$$

a) [1,25 puntos] Determina el punto simétrico de P respecto de r.

Sea π el plano perpendicular a r y que contiene a P, el vector normal de π es el vector de r.

Pasamos a r a forma paramétrica y determinamos un punto de r, P_r y un vector director, V_r.

$$r \equiv \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2-2\lambda \end{cases} \qquad P_r(5,0,-2) \qquad \overrightarrow{V_r} = (1,1,-2)$$

Determinamos π. Su vector normal es el de la recta: $\pi_n = (1,1,-2) \quad \rightarrow \quad \pi \equiv x+y-2z+D=0$

Determinamos D sabiendo que P pertenece al plano. $1+0-2\cdot(-1)+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-3$

Por tanto $\pi \equiv x+y-2z-3=0$.

Llamemos M a la intersección entre π y r, que es el punto medio entre P y su simétrico S. Calculamos esta intersección determinando λ de la recta que satisface la ecuación del plano.

$\pi \equiv x+y-2z-3=0 \quad \rightarrow \quad 5+\lambda+\lambda-2(-2-2\lambda)-3=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=-1 \quad \rightarrow \quad M=(4,-1,0)$

Puesto que M es el punto medio entre P y S, usamos la fórmula del punto medio para despejar las coordenadas de S.

$$(4,-1,0) = \left(\frac{S_x+1}{2}, \frac{S_y}{2}, \frac{S_z-1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_x=7 \quad S_y=-2 \quad S_z=1$$

Simétrico: $(7,-2,1)$

b) [1.25 puntos] Calcula el punto de r que equidista de P y Q.

Para ello calculamos el plano bisectriz π_B de P y Q, que contiene todos los puntos del espacio equidistantes a P y Q. Este se determina mediante el punto medio entre ellos y un vector formado por ellos.

$$\overrightarrow{PQ} = (1,1,2) \qquad M_{PQ} = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\pi_B \equiv x+y+2z+D=0 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2\cdot 0+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-2 \quad \rightarrow \quad \pi_B \equiv x+y+2z-2=0$$

La intersección entre este plano y la recta r nos da el punto buscado.

$\pi_B \cap r \quad \rightarrow \quad (5+\lambda)+\lambda+2(-2-2\lambda)-2=0 \quad \rightarrow \quad -2\lambda-1=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{2}$

Las coordenadas del punto buscado son: $x=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2} \quad y=-\frac{1}{2} \quad z=-2-2\cdot(-\frac{1}{2})=-1$

Solución: Punto$\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$