Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

En general es falso, porque el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa. Comprobamos en este caso concreto.

$$(A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2AB = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, por tanto, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ en este caso.

b) (1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = 2B^t + I_2$

Despejamos la matriz X.

$$X \cdot A = 2B^t + I_2 \quad \rightarrow \quad X \cdot \cancel{A \cdot A^{-1}} = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} \quad \rightarrow \quad X = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} = \left(2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Sea la función $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^3 + ax^2 & \text{si } x < 1 \\ bx + \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{array} \right.$

a) (1.5 puntos) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 1$.

$x^3 + ax^2$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

La función $bx + \frac{2}{x}$ es continua excepto en $x = 0$, pero $0 < 1$, por tanto es continua en su dominio.

Queda obligar a $f(x)$ a ser continua en $x = 1$.

$f(1) = b \cdot 1 + \frac{2}{1} = b + 2$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^3 + ax^2) = 1^3 + a \cdot 1^2 = a + 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(bx + \frac{2}{x} \right) = b \cdot 1 + \frac{2}{1} = b + 2$$

Por tanto, $a + 1 = b + 2$, o lo que es lo mismo $a - b = 1$

Pasamos a comprobar la derivabilidad.

$$\left(bx + \frac{2}{x} \right)' = b + \frac{0 \cdot x - 2 \cdot 1}{x^2} = b - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 3x^2 + 2ax & x < 1 \\ b - \frac{2}{x^2} & x > 1 \end{array} \right.$$

Cada tramo es continuo en su dominio, (es segundo no es continuo en $x = 0$, pero $0 < 1$, por lo que es continuo en su dominio). Buscamos condiciones de derivabilidad en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1} (3x^2 + 2ax) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 = 3 + 2a$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1} \left(b - \frac{2}{x^2} \right) = b - \frac{2}{1^2} = b - 2$$

Por tanto, $3 + 2a = b - 2$, o lo que es lo mismo $2a - b = -5$. Resolvemos el sistema.

$$\left\{ \begin{array}{r} a - b = +1 \\ 2a - b = -5 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad a = 1 + b \quad \rightarrow \quad 2(1 + b) - b = -5 \quad \rightarrow \quad b = -7 \quad \rightarrow \quad a = -6$$

b) (1 punto) Para $b = 3$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto $x = 2$.

Si $b = 3$, $f(x) = bx + \frac{2}{x} = 3x + \frac{2}{x}$.

Obtenemos punto y pendiente en $x = 2$ para determinar la recta mediante la ecuación punto-pendiente. $y - f(a) = m(x - a)$

$f'(x) = 3 - \frac{2}{x^2}$ $\quad m = f'(2) = 3 - \frac{2}{2^2} = \frac{5}{2}$ $\quad f(2) = 3 \cdot 2 + \frac{2}{2} = 7$

En nuestro caso: $y - f(2) = m(x - 2) \quad \to \quad y - 7 = \frac{5}{2}(x - 2)$

Nota: La ecuación de la recta queda mucho "más bonita" en forma general en este caso, porque no tendrá fracciones. $5x - 2y + 4 = 0$. *Aun así, en el formato anterior se puntuaría como correcta. También será correcto* $y = \frac{5}{2}x + 2$

Ejercicio 3.- Un campus universitario dispone de 3000 plazas numeradas de aparcamiento para vehículos, distribuidas en tres zonas, A, B y C. La zona A está constituida por las plazas del 1 al 1500, estando 1350 de ellas protegidas del sol. La zona B la conforman las plazas numeradas desde 1501 a 2500, estando el 80% protegidas del sol. La zona C contine la plazas numeradas desde 2501 hasta 3000, estando solamente 250 protegidas del sol. Aleatoriamente se elige una de las plazas de aparcamiento del campus.

a) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?

$A \equiv$ zona A. $\quad B \equiv$ zona B. $\quad C \equiv$ zona C. $\quad P \equiv$ estar protegida del sol.

$$P(A) = \frac{1500}{3000} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3} \quad P(C) = \frac{500}{3000} = \frac{1}{6}$$

$$P(P/A) = \frac{1350}{1500} = \frac{9}{10} \quad P(P/B) = 80\% = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \quad P(P/C) = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$$

Buscamos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Puesto que es imposible estar aparcado al mismo tiempo en la zona A y en la B los sucesos A y B son incompatibles y $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}$$

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

$P(A) = \frac{1}{2}$ → $P(P/A) = \frac{9}{10}$ → $P(A \cap P) = P(A) \cdot P(P/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{20}$

$P(A) = \frac{1}{2}$ → $P(\bar{P}/A) = \frac{1}{10}$ → $P(A \cap \bar{P}) = P(A) \cdot P(\bar{P}/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$

$P(B) = \frac{1}{3}$ → $P(P/B) = \frac{4}{5}$ → $P(B \cap P) = P(B) \cdot P(P/B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$

$P(B) = \frac{1}{3}$ → $P(\bar{P}/B) = \frac{1}{5}$ → $P(B \cap \bar{P}) = P(B) \cdot P(\bar{P}/B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$P(C) = \frac{1}{6}$ → $P(P/C) = \frac{1}{2}$ → $P(C \cap P) = P(C) \cdot P(P/C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P(C) = \frac{1}{6}$ → $P(\bar{P}/C) = \frac{1}{2}$ → $P(C \cap \bar{P}) = P(C) \cdot P(\bar{P}/C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$$P(\bar{P}) = P(A) \cdot P(\bar{P}/A) + P(B) \cdot P(\bar{P}/B) + P(C) \cdot P(\bar{P}/C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

c) (1 punto) Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuál es la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

$$P(B/P) = \frac{P(B \cap P)}{P(P)} = \frac{P(B) \cdot P(P/B)}{1 - P(\bar{P})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 4.- En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediante muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.

a) (1.5 puntos) Calcule un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social.

$p = \dfrac{380}{500} = \dfrac{19}{25} \quad q = 1 - \dfrac{19}{25} = \dfrac{6}{25}$

$1 - \alpha = 0'97 \qquad \alpha = 0'03 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'015} = Z_{0'985} = 2'17$

$$I.C. = \left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \left(\frac{19}{25} - 2'17\sqrt{\frac{\frac{19}{25} \cdot \frac{6}{25}}{500}}, \frac{19}{25} + 2'17\sqrt{\frac{\frac{19}{25} \cdot \frac{6}{25}}{500}}\right) =$$

$$I.C. = (0'7186, 0'8014)$$

b) (1 punto) Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96%, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%.

$1 - \alpha = 0'96 \qquad \alpha = 0'04 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'02} = Z_{0'98} = 2'055$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \Rightarrow \quad 0'02 = 2'055\sqrt{\frac{\frac{19}{25} \cdot \frac{6}{25}}{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\frac{19}{25} \cdot \frac{6}{25}}{\left(\frac{0'02}{2'055}\right)^2} \approx 1925'7$$

Mínimo 1926 estudiantes.