Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.-
a) (1 punto) Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar:
"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0.50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0.25 euros, calcule cuántos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

Llamemos x a el número de kg de maíz e y a el número de kg pienso. Hacemos una tabla con los datos y extraemos las inecuaciones del sistema.

	x	y	
Hidratos de carbono	600	300	1800
Proteinas	200	600	2400

$600x + 300y \geq 1800$
$200x + 600y \geq 2400$
$x \geq 0 \qquad y \geq 0$

$F(x, y) = 0.50x + 0.25y$

b) (1.5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0 \qquad x \leq 2y + 2 \qquad x + y \leq 5$$

Calcule el máximo de $F(x, y) = 4x + 3y$ en ese recinto, así como el punto donde se alcanza.

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$x = 2y + 2$

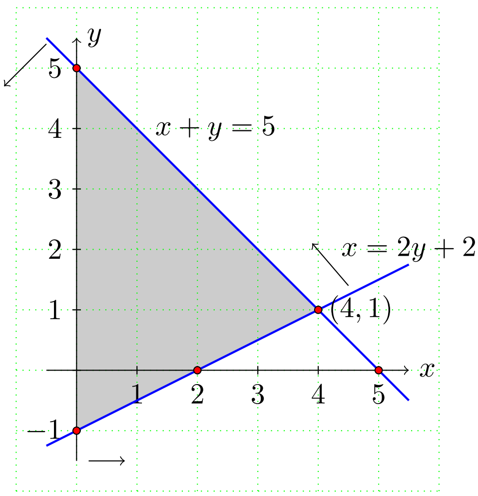
x	y
0	-1
2	0

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

$$\begin{cases} x = 2y + 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$2y + 2 + y = 5$
$3y = 3$
$y = 1$
$x = 2 \cdot 1 + 2 = 4$



Vértices: $(0, -1) \quad (4, 1) \quad (0, 5)$
Función objetivo: $F(x, y) = 4x + 3y$

$F(0,-1) = 3 \cdot (-1) = -3$
$F(4,1) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 19$
$F(0,5) = 3 \cdot 5 = 15$

Máximo en $(4,1)$ de valor 19.

Ejercicio 2.- La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión

$$f(x) = 40 - 6x + x^2, \qquad \text{para } x \geq 0$$

donde x respresenta la cantidad producida de un determinado artículo.

a) (1 punto) ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.

Los costes disminuirán cuando la derivada de $f(x)$ sea negativa. Habrá mínimo coste en algún posible extremo, ($f'(x) = 0$), o en el 0, donde se inicia el intervalo de definición de la función. Procedemos a buscarlo.

$f'(x) = -6 + 2x; \qquad f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6 + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$

$f(x)$ es continua y definida en $[0, \infty)$. Estudiamos la monotonía en los intervalos $(0,3)$ y $(3, \infty)$.

$f'(1) = -6 + 2 \cdot 1 = -4 \quad \rightarrow \quad f(x)$ decrece en $(0,3)$.
$f'(4) = -6 + 2 \cdot 4 = +2 \quad \rightarrow \quad f(x)$ crece en $(3, \infty)$.

Por tanto, hay un mínimo en $x = 3$. $f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 31$

Al inicio del intervalo de definición, (en $x = 0$), la función vale $f(0) = 40 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 40$. El punto $(3,31)$ es menor que este, $(0,40)$. Por tanto:

El coste disminuye en $x \in (0,3)$. El coste mínimo es de 31 obtenido con 3 artículos.

b) (0.8 puntos) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese de 80, ¿cuántas serían las unidades producidas?

$f(0) = 40 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 40$ Los costes son de 40 si no se producen artículos.

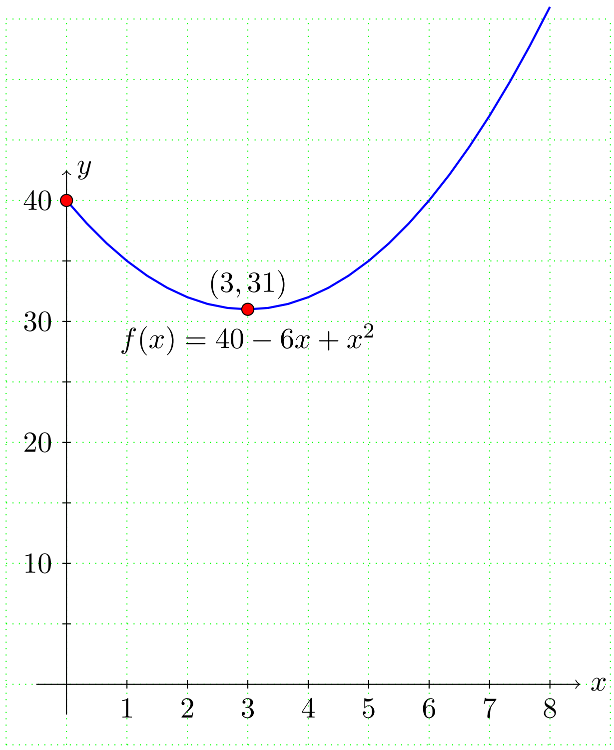
$$40 - 6x + x^2 = 80 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x - 40 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = \begin{cases} 10 \\ -4 \end{cases}$$

El número de artículos tiene que ser mayor o igual a 0, por tanto la solución negativa no es válida.

Para un coste de 80 se han producido 10 unidades.

c) (0.5 puntos) Represente la gráfica de la función.

Se trata de una parábola definida en $[0, \infty)$, con inicio en $(0, 40)$ y vértice en $(3, 31)$. Puesto que el coeficiente de x^2 es positivo, la parábola es convexa y viendo la ubicación del vértice intuimos que no corta al eje x. Procedemos a representarla.



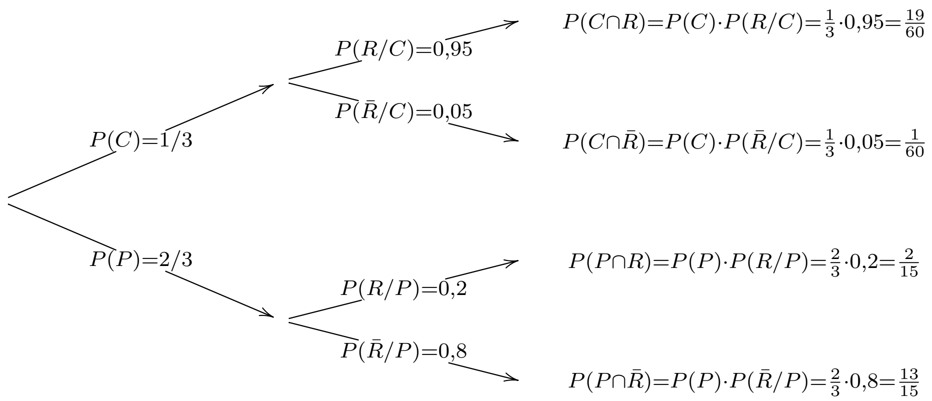
Ejercicio 3.- En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de los vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

$C \equiv$ residir en el centro. $P \equiv$ residir en la periferia. $R \equiv$ querer restringir el acceso.

$$P(C) = \frac{5000}{5000+10000} = \frac{1}{3} \qquad P(P) = \frac{2}{3} \qquad P(R/C) = 0,95 \qquad P(R/P) = 0,2$$

$$P(\bar{R}/C) = 1 - P(R/C) = 1 - 0,95 = 0,05 \qquad P(\bar{R}/P) = 1 - P(R/P) = 1 - 0,2 = 0,8$$



$$P(R) = P(C)\cdot P(R/C) + P(P)\cdot P(R/P) = \frac{19}{60} + \frac{2}{15} = \frac{9}{20}$$

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

$$P(C\cap R) = P(C)\cdot P(R/C) = \frac{1}{3}\cdot 0,95 = \frac{19}{60}$$

b) (0.75 puntos) Si la persona elegida opina que ser derbería restringuir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

$$P(C/R) = \frac{P(C\cap R)}{P(R)} = \frac{19/60}{9/20} = \frac{19}{27}$$

Ejercicio 4.- Se dispone de 4 tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso respectivamente.

a) (1.25 puntos) Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.

Puesto que se dispone solo de 4 tornillos diferentes no es posible repetir el mismo tornillo en la muestra y por tanto son muestras sin reposición.

Si 12 representa coger el tornillo de 1 gramo junto con el de 2 gramos, las posibles muestras son:

$$E = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$$

b) (1.25 puntos) Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales.

Dada la muestra 12, su peso medio muestral es $\dfrac{1+2}{2} = 1,5$

De la misma forma obtenemos el resto de pesos medios. Su media:

$$\bar{x} = \frac{1,5 + 2 + 2,5 + 2,5 + 3 + 3,5}{6} = 2,5$$

Su varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1,5^2 + 2^2 + 2,5^2 + 2,5^2 + 3^2 + 3,5^2}{6} - 2,5^2 \approx 0,417$$