Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.-

a) (0.8 puntos) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \leq 3 \qquad 2x + y \geq 4 \qquad y \geq -1$$

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$x + y = 3$

x	y
0	3
3	0
4	-1

$0 + 0 \leq 3$

$2x + y = 4$

x	y
0	4
2	0
5/2	-1

$2 \cdot 0 + 0 \not\geq 4$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$x = 3 - y$

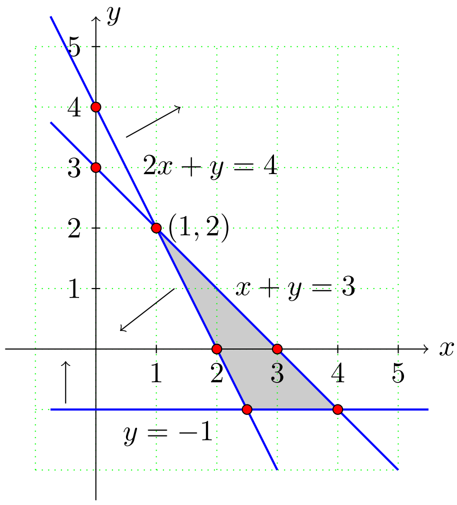
$2(3 - y) + y = 4$

$6 - 2y + y = 4$

$-y = 4 - 6$

$y = 2$

$x = 3 - 2 = 1$



b) (0.25 puntos) Razone is el punto $(2, 1)$ pertenece al recinto anterior.

Para pertenecer a la región factible debe cumplir todas las inecuaciones.

$x + y \leq 3$	$\rightarrow$	$2 + 1 = 3 \leq 3$	Cierto
$2x + y \geq 4$	$\rightarrow$	$2 \cdot 2 + 1 = 5 \geq 4$	Cierto
$y \geq -1$	$\rightarrow$	$1 \geq -1$	Cierto

Puesto que se cumplen todas las inecuaciones, el punto pertenece al recinto.

c) (1.2 puntos) Obtenga los vértices del recinto y los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 5x + 4y$ en ese recinto, indicando en que puntos se alcanzan.

Vértices: $(1, 2)$ $(\frac{5}{2}, -1)$ $(4, -1)$ Función objetivo: $F(x, y) = 5x + 4y$

$f(1, 2) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$ $\quad f(\frac{5}{2}, -1) = 5 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot (-1) = \frac{17}{2} = 8'5$ $\quad f(4, -1) = 5 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = 16$

Mínimo en $(\frac{5}{2}, -1)$ de valor $\frac{17}{2}$. Máximo en $(5, -1)$ de valor 16.

e) (0.25 puntos) Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

La función alcanza valores mínimo de $8'5$ y máximo de 16. 9 está entre ambos, por lo que si alcanzará este valor en varios puntos.

Nota: Otra forma de hacerlo es dibujando en el gráfico la recta $5x + 4y = 9$ y viendo que pasa por dentro de la región factible.

Ejercicio 2.- Se consideran las siguientes funciones $f(x) = \dfrac{5x - 16}{x}$ y $g(x) = x^2$

a) (1 punto) Determine la abcisa del punto donde se verifique que $f'(x) = g'(x)$

$$f'(x) = \frac{5 \cdot x - (5x - 16) \cdot 1}{x^2} = \frac{16}{x^2} \qquad g'(x) = 2x.$$

$$f'(x) = g'(x) \quad \rightarrow \quad \frac{16}{x^2} = 2x \quad \rightarrow \quad 16 = 2x^3 \quad \rightarrow \quad \tfrac{16}{2} = x^3 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

La abcisa es $x = 2$

b) (1.5 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función el punto de abcisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

Usaremos la ecuación punto-pendiente: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.

$f(2) = \dfrac{5 \cdot 2 - 16}{2} = -3 \qquad f'(2) = \dfrac{16}{2^2} = 4$. Recta tangente: $y + 3 = 4(x - 2)$

$g(2) = 2^2 = 4 \qquad g'(2) = 2 \cdot 2 = 4$. Recta tangente: $y - 4 = 4(x - 2)$

Las 2 rectas tienen la misma pendiente, $(m = 4)$, y por tanto son paralelas. Consecuentemente, no se cortan.

Ejercicio 3.- Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola.

a) (1.25 puntos) Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

$R1 \equiv$ la primera bola extraida es roja. $V1 \equiv$ la primera bola extraida es verde.
$R2 \equiv$ la segunda bola extraida es roja. $V2 \equiv$ la segunda bola extraida es verde.

$P(R1) = \frac{5}{8}$

- $P(R2/R1) = \frac{4}{9} \longrightarrow P(R1 \cap R2) = P(R1) \cdot P(R2/R1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5}{18}$
- $P(V2/R1) = \frac{5}{9} \longrightarrow P(R1 \cap V2) = P(R1) \cdot P(V2/R1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{72}$

$P(V1) = \frac{3}{8}$

- $P(R2/V1) = \frac{7}{9} \longrightarrow P(V1 \cap R2) = P(V1) \cdot P(R2/V1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{24}$
- $P(V2/V1) = \frac{2}{9} \longrightarrow P(V1 \cap V2) = P(V1) \cdot P(V2/V1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{12}$

$$P(V2) = P(R1) \cdot P(V2/R1) + P(V1) \cdot P(V2/V1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \frac{31}{72}$$

b) (1.25 puntos) Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

$$P(R1/R2) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{P(R1 \cap R2)}{1 - P(V2)} = \frac{\frac{5}{18}}{1 - \frac{31}{72}} = \frac{20}{41}$$

Ejercicio 4.- En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

a) (1.25 puntos) Determine, con un nivel de confianza al 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

$$p = \frac{25}{100} = 0'25 \quad q = 0'75 \qquad 1 - \alpha = 0'95 \qquad \alpha = 0'05 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'025} = Z_{0'975} = 1'96$$

$$I.C. = \left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \left(0'25 - 1'96\sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{100}}, 0'25 + 1'96\sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{100}}\right) =$$

$$I.C. = (0'1651, 0'3349)$$

b) (1.25 puntos) Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de $0'2$, y el error cometido en la estimación ha sido inferior al $0'03$, con un nivel de confianza del $92'5\%$ calcule el tamaño mínimo de la muestra.

$$p = 0'2 \qquad q = 0'8 \qquad 1 - \alpha = 0'925 \qquad \alpha = 0'075 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'0375} = Z_{0'9625} = 1'78$$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \rightarrow \quad n = pq\left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 = 0'2 \cdot 0'8\left(\frac{1'78}{0'03}\right)^2 \approx 563'3$$

Mínimo 564 estudiantes.