Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado.

$$A^2 \qquad A - B \qquad A \cdot B \qquad A \cdot B^t$$

A^2 no es posible, pues A no es cuadrada.

Nota: Otra forma de exponerlo. $A^2 = A \cdot A$. Ya que la dimensión de A es de 2x3, no podemos realizar el producto pues el número de columnas de la matriz de la izquierda, (3), no coincide con le número de filas de la matriz de la derecha, (2).

$A - B$ no puede realizarse porque no tienen la misma dimensión.

$A \cdot B$ si puede realizarse poque el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B^t$ no puede realizarse. Dimensión de A: 2x3. Dimensión de B^t: 2x3. El número de columnas de A, (3), no coincide con el número de filas de B^t, (2).

b) (1 punto) Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$

Puesto que B no es cuadrada no podremos obtener la matriz B^{-1}, por lo que plantearemos ecuaciones definiendo la matríz X mediante parámetros. Analizamos la dimensión necesaria para la matriz X.

$$A^t + B \cdot X = 3B \quad \rightarrow \quad B \cdot X = 3B - A^t$$

Puesto que $3B - A^t$ tiene dimensión 3x2, para que séa posible el producto $B \cdot X$, la matriz X tiene que tener dimensión 2x2.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot X = 3B - A^t \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} a=3 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=3 \end{array}$$

Comprobamos que las soluciones sean coherentes con la última fila de las matrices:

$$a+c = 3-1 = 2 \qquad b+d = -1+3 = 2$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

a) (1 punto) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abcisa $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto de abcisa $x = -2$.

Del enunciado concluimos que $f'(-1) = 0$ y que $f''(-2) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \rightarrow \quad f'(-1) = 3 - 2a + b \quad \rightarrow \quad 3 - 2a + b = 0$

$f''(x) = 6x + 2a \quad \rightarrow \quad f''(-2) = -12 + 2a \quad \rightarrow \quad -12 + 2a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 6$

$3 - 2a + b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 2a - 3 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$

$$a = 6 \qquad b = 9$$

b) (1.5 puntos) Para $a = 6$ y $b = 9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

$a = 6$ y $b = 9 \quad \rightarrow \quad f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9)$

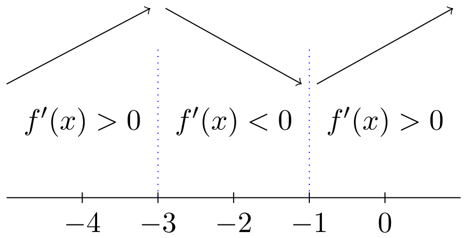
Corte con el eje y, $(x = 0)$. $\quad f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$. Corte en $(0, 0)$.

Corte con el eje x, $(y = 0)$. $\quad 0 = x(x^2 + 6x + 9) \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad$ y $\quad x^2 + 6x + 9 = 0$.

$x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = -3 \quad$ Cortes en $(0, 0)$ y en $(-3, 0)$.

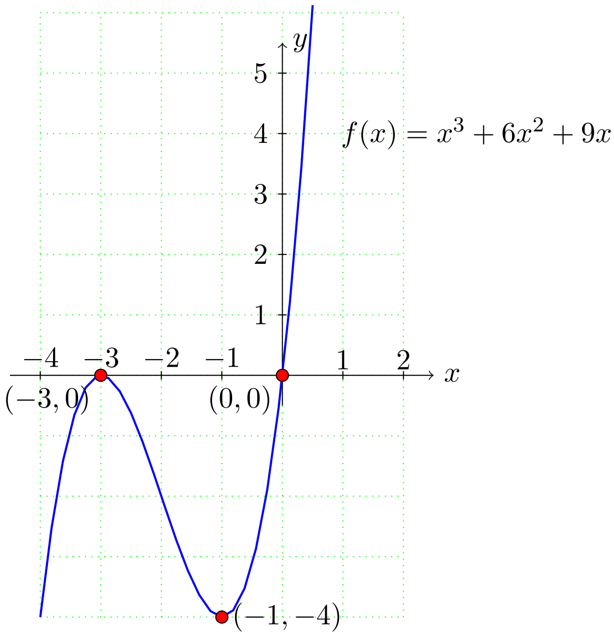
$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 \qquad f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 12x + 9 = 0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{-12 \pm 6}{6} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$



$f'(-4) = 3(-4)^2 + 12(-4) + 9 = 9 > 0$ Crece.
$f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 9 = -3 < 0$ Decrece.
$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$ Crece.

Máximo en $x = -3$. $f(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) = 0$
Mínimo en $x = -1$. $f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) = -4$



Ejercicio 3.- Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera con México y que solo el 5% de los que no lo votaron la apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye el muro?

$T \equiv$ votar a Trump. $A \equiv$ apoyar la construcción del muro.

$$P(T) = \frac{5000}{5000+10000} = \frac{1}{3} \quad P(\bar{T}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad P(A/T) = 20\% = \frac{1}{5} \quad P(A/\bar{T}) = 5\% = \frac{1}{20}$$

$P(T) = \frac{1}{3}$

- $P(A/T) = \frac{1}{5} \longrightarrow P(T \cap A) = P(T) \cdot P(A/T) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$
- $P(\bar{A}/T) = \frac{4}{5} \longrightarrow P(T \cap \bar{A}) = P(T) \cdot P(\bar{A}/T) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$

$P(\bar{T}) = \frac{2}{3}$

- $P(A/\bar{T}) = \frac{1}{20} \longrightarrow P(\bar{T} \cap A) = P(\bar{T}) \cdot P(A/\bar{T}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{30}$
- $P(\bar{A}/\bar{T}) = \frac{19}{20} \longrightarrow P(\bar{T} \cap \bar{A}) = P(\bar{T}) \cdot P(\bar{A}/\bar{T}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{30}$

$$P(A) = P(T) \cdot P(A/T) + P(\bar{T}) \cdot P(A/\bar{T}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{10} = 10\%$$

b) (0.75 puntos) Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

$$P(\bar{T}/A) = \frac{P(\bar{T} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$

c) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

$$P(T \cup A) = P(T) + P(A) - P(T \cap A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{11}{30}$$

Ejercicio 4.- El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores:

46 38 59 29 34 32 38 21 44 34

a) (1.5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 95%, para la vida media de dicha especie de tortugas.

$$\bar{x} = \frac{46+38+59+29+34+32+38+21+44+34}{10} = \frac{375}{10} = 37'5$$

$1-\alpha = 0'95 \qquad \alpha = 0'05 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'025} = Z_{0'975} = 1'96$

$$I.C. = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(37'5 - 1'96\frac{10}{\sqrt{10}}, 37'5 + 1'96\frac{10}{\sqrt{10}}\right) = (31'30, 43'70)$$

b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98%.

$1-\alpha = 0'98 \qquad \alpha = 0'02 \qquad Z_{\alpha/2} = Z_{0'01} = Z_{0'99} = 2'325$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad n = \left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2'325\cdot\frac{10}{5}\right)^2 = 21'6$$

Mínimo 22 tortugas.