Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

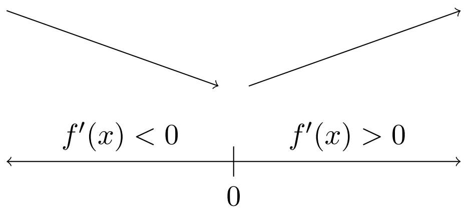
La función es continua en $\mathbb{R}$, por ser mitad de la suma de dos funciones continuas.

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \quad \to \quad e^x = e^{-x} \quad \to \quad e^x = \dfrac{1}{e^x} \quad \to \quad e^{2x} = 1 \quad \to \quad x = 0$

$f'(-1) = \frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-(-1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e} - e\right) < 0 \Rightarrow$ Decrece.

$f'(1) = \frac{1}{2}\left(e^{1} - e^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right) > 0 \Rightarrow$ Crece.



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

$f(0) = \dfrac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$

Mínimo: abcisa: $x = 0$, valor: $y = 1$.

b) [0,5 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

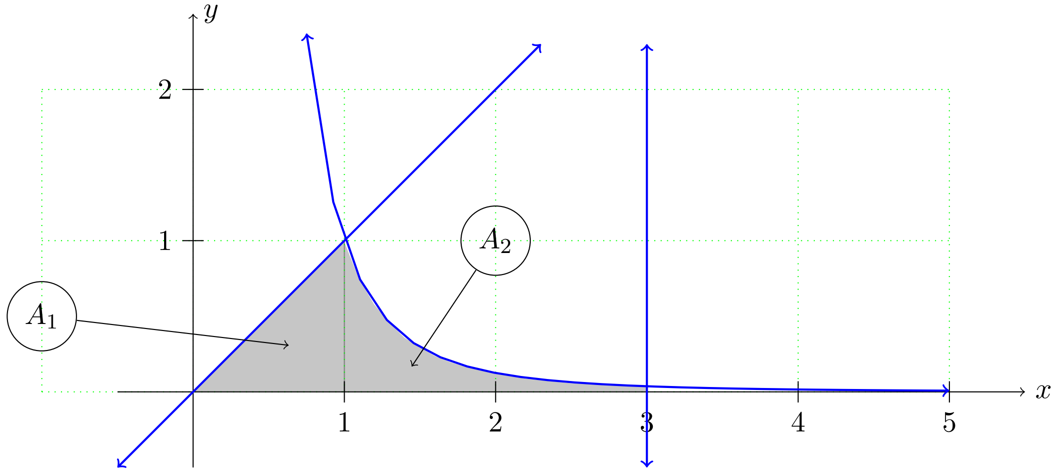
$x_0 = 0 \qquad f(0) = 1 \qquad f'(0) = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$

Si la pendiente a $f(x)$ en $x = 0$ es cero, entonces la pendiente de la recta normal, $(-\frac{1}{0})$, es infinita. Por tanto la ecuación de la recta normal, al pasar por el punto $(0, 1)$, es $x = 0$.

Ejercicio 2.- Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y = x$, la gráfica $y = \dfrac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.

La recta $y = x$ pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. La recta $x = 3$ es vertical y pasa por el punto $(3,0)$. La función $y = \dfrac{1}{x^3}$ es similar a una función inversa $y = \dfrac{1}{x}$. Tiene asíntotas horizontal y vertical en $y = 0$ y $x = 0$ y pasa por el punto $(1,1)$.



b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

$$A_t = A_1 + A_2 = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x^3} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \int_1^3 x^{-3} dx = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 = \frac{1}{2} + \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^3 =$$
$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{18} \text{ u}^2.$$

c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \dfrac{1}{x}$ en lugar de $y = \dfrac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

Será mayor. El área de la izquierda, (A_1), no cambia. La función $y = \dfrac{1}{x}$ tiene valores mayores a la función $y = \dfrac{1}{x^3}$ siempre que $x > 1$. Por ejemplo, en $x = 2$, $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2^3}$. Por tanto, el A_2 será mayor y el área total también.

Nota: También puede calcularse el nuevo área y ver que numéricamente es mayor, pero eso no nos da un argumento para explicar porqué.

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

a) [1.5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = k^2(k+1) + k(k+1)^2 = k(k+1)[k+(k+1)] = k(k+1)(2k+1)$$

$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad k = 0;\ k = -1;\ k = -\frac{1}{2}$

$Rg(A) = 3$ si $k \neq 0$, $k \neq -1$ y $k \neq -\frac{1}{2}$.

Para $k = 0,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El menor formado por $a_{21},\ a_{22},\ a_{31},\ a_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, y por tanto para $k = 0,\ Rg(A) = 2$.

Para $k = -1,\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El menor formado por $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, y por tanto para $k = -1,\ Rg(A) = 2$.

Para $k = -\frac{1}{2},\ A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

El menor formado por $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \neq 0$, y por tanto para $k = 0,\ Rg(A) = 2$.

b) [1 punto] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2(A^tA^{-1})^{2017}$ siendo A^t las traspuesta de A.

$|A| = k(k+1)(2k+1)$. Si $k = 1,\ |A| = 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 6$

Nota: También se puede hacer: Con $k = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = (2+4) - (0) = 6$.

$|A^t| = |A| = 6 \qquad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{6}$

$$\left|2(A^tA^{-1})^{2017}\right| = 2^3 \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{6}\right)^{2017} = 8$$

Ejercicio 4.- Considera punto $P(0,1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x-2y=-5 \\ z=+2 \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

Podemos usar el haz de planos. $r \equiv \begin{cases} x-2y=-5 \\ z=+2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x-2y+5=0 \\ z-2=0 \end{cases}$

$(x-2y+5)+\lambda(z-2)=0; \quad P(0,1,1) \quad \rightarrow \quad (0-2\cdot1+5)+\lambda(1-2)=0 \quad \rightarrow \quad 3-\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=3$

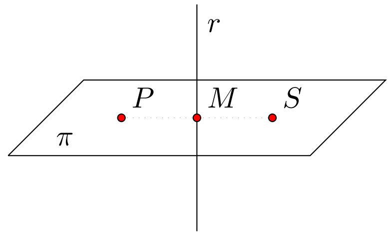
$$(x-2y+5)+3(z-2)=0 \quad \rightarrow \quad x-2y+3z-1=0$$

Nota: Otra forma de hacerlo es tomando 2 puntos de r, creando vectores con P o similar y calculando la ecuación del plano mediante un determinante con un punto y 2 vectores.

Solución: $x-2y+3z-1=0$

b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

Trazamos el plano π perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de π es el vector director de la recta. Pasamos la recta a paramétricas para determinarlo usando y como parámetro.



$$r \equiv \begin{cases} x=-5+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{V_r}=(2,1,0)$$

$\pi \equiv 2x+y+0z+D=0; \; P(0,1,1) \quad \rightarrow \quad 2\cdot0+1+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-1$

$\pi \equiv 2x+y-1=0$

La intersección entre π y r es el punto M, (punto medio entre P y su simétrico S).

$\pi \cap r \quad \rightarrow \quad 2(-5+2\lambda)+\lambda-1=0 \quad \rightarrow \quad 5\lambda-11=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{11}{5}$

$M=\left(-5+2\cdot\frac{11}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)=\left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)$

Usamos la fórmula del punto medio para averiguar S.

$$\left(-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}, 2\right)=\left(\frac{S_x}{2}, \frac{S_y+1}{2}, \frac{S_z+1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_x=-\frac{6}{5} \quad S_y=\frac{17}{5} \quad S_z=3$$

Solución: $\left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 3\right)$