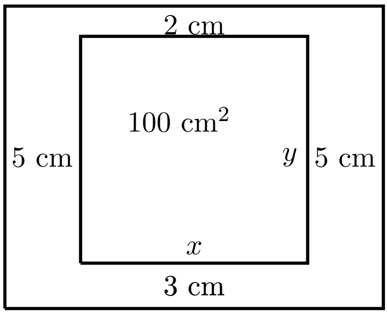
Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Dado la imagen de la derecha podemos obtener 2 ecuaciones para las áreas de la tarjeta. La segunda es el área que queremos minimizar.



$x \cdot y = 100$

$A_t = (x + 10)(y + 5)$

$$y = \frac{100}{x} \quad \to \quad A_t = (x+10)\left(\frac{100}{x} + 5\right) = 100 + 5x + \frac{1000}{x} + 50 = 150 + 5x + \frac{1000}{x}$$

$$A_t'(x) = 5 - \frac{1000}{x^2} \qquad A_t'(x) = 0 \quad \to \quad 5 = \frac{1000}{x^2} \quad \to \quad x = \pm\sqrt{200} = \pm 10\sqrt{2}$$

Evidentemente la solución negativa no es válida. Comprobamos que la solución positiva es un mínimo con el criterio de la segunda derivada.

$$A_t''(x) = \frac{2000}{x^3} \qquad A_t''(10\sqrt{2}) = \frac{2000}{(10\sqrt{2})^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

$$y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Dimensiones de la tarjeta. Ancho: $10\sqrt{2} + 10$ cm. Alto: $5\sqrt{2} + 5$ cm.

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Datos: $f''(x) = xe^x \qquad f(0) = 0 \qquad f'(1) = 0$

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int xe^x dx$$

Integramos por partes.

$u = x \quad du = dx \quad dv = e^x dx \quad v = e^x$

$$f'(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k_1 = e^x(x-1) + k_1$$

$$f'(1) = 0 \quad \rightarrow \quad e^1(1-1) + k_1 = 0 \quad \rightarrow \quad k_1 = 0$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (xe^x - e^x)dx = xe^x - e^x - e^x + k_2 = e^x(x-2) + k_2$$

$$f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad e^0(0-2) + k_2 = 0 \quad \rightarrow \quad k_2 = 2$$

Solución: $f(x) = e^x(x-2) + 2$

Ejercicio 3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; \text{ y } B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}$$

a) [1.25 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

Denominemos M a la matriz de coeficientes del sistema junto con la matriz columna B. Calculamos rangos mediante determinantes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = (0+6+3) - (0+9+2(m-2)) = 4-2m$$

$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad 4-2m = 0 \quad \rightarrow \quad m = 2$

Si $m \neq 2, Rg(A) = 3$ y $Rg(M) = 3 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Estudiamos el caso para $m = 2$. Dado que el menor formado por $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 \neq 0$, para el rango de la matríz ampliada sustituimos la tercera columna de A por B sustituyendo m por 2 y calculamos su determinante.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (0+12+5) - (0+15+2) = 0$$

Por tanto con $m = 2,\ Rg(A) = 2,\ Rg(M) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

b) [1.25 puntos] Para $m = 2$, calcula, si es posible, una solución del sistema anterior para la que $z = 17$.

Como hemos visto, con $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

Eliminamos la tercera ecuación y determinamos $z = \lambda$ como parámetro del sistema. Escalonamos y resolvemos.

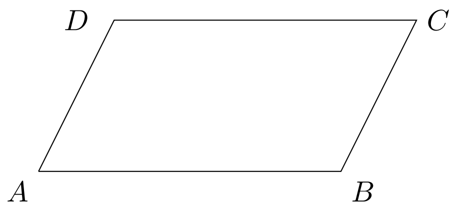
$$\left\{ \begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3z=5 \end{array} \right. \overset{z=\lambda}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{rl} x+y & = 2-\lambda \\ 2x & = 5-3\lambda \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad x = \frac{5-3\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\lambda-1}{2}$$

$$\lambda = 17 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5-3\cdot 17}{2} = -23 \qquad y = \frac{17-1}{2} = 8$$

Solución: $\quad x = -23 \quad y = 8 \quad z = 17.$

Ejercicio 4.- Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.
a) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.

$$A_{par} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$



$\overrightarrow{AB} = (1,1,1) \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$

$$A_{par} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right\| = |-2j + 2k| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene e dicho paralelogramo.

Usaremos el punto A y los dos vectores del apartado anterior, $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$

$$\left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \Big((x-1) - (y-1) + (z-1)\Big) - \Big((x-1) + (y-1) - (z-1)\Big) = -2y + 2z$$

$-2y + 2z = 0 \quad \equiv \quad y - z = 0$

Solución: $y - z = 0$

b) [0,5 punto] Calcula las coordenadas del vértice D.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = (1,1,1) + (-1,1,1) = (0,2,2)$

Solución: $D(0,2,2)$