Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Nota: Al ser una función racional, podemos hacer al mismo tiempo los límites en $\pm\infty$. En otros tipos de funciones habria que hacer 2 límites para cada caso, uno hacia $+\infty$ y otro hacia $-\infty$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \overset{\text{IND}}{\left[\frac{\infty}{\pm\infty}\right]} = \pm\infty \text{ No hay asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} : x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Asíntota oblicua en $y = x + 1$

Asíntotas verticales:

Al ser una función racional, solo puede haber asíntotas verticales donde se anule el denominador.

$$x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$$

Comprobamos que efectivamente es una asíntota.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1^2}{1-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

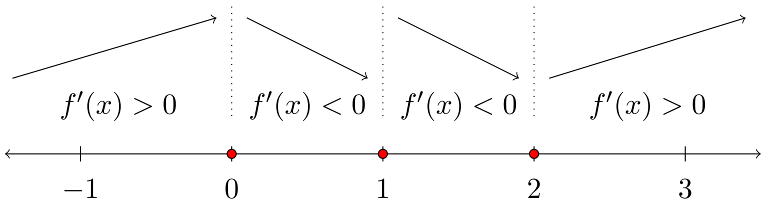
Efectivamente hay asíntota vertical en $x = 1$, (no se ha estudiado el posicionamiento).

b) [1.5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abcisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad x = 2$$

Posibles extremos en $x = 0$ o $x = 2$. Función no definica en $x = 1$. Comprobamos signo de la derivada en cada intervalo.



$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} > 0$$

$$f'(0,5) = \frac{0,5^2 - 2 \cdot 0,5}{(0,5^2 - 1)^2} < 0$$

$$f'(1,5) = \frac{1,5^2 - 2 \cdot 1,5}{(1,5^2 - 1)^2} < 0$$

$$f'(3) = \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{(3-1)^2} > 0$$

f decrece en $(0,1) \cup (1,2)$ $\qquad$ f crece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

En $x = 0$ hay un máximo. $f(0) = \dfrac{0^2}{0-1} = 0$ Abcisa: $x = 0$. Valor: 0

En $x = 2$ hay un mínimo. $f(2) = \dfrac{2^2}{2-1} = 4$ Abcisa: $x = 2$. Valor: 4

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t=\sqrt[4]{x}$)

$$t=\sqrt[4]{x} \qquad t^2=\sqrt[4]{x}^2=\sqrt{x} \qquad dt=(x^{\frac{1}{4}})'dx=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{4\sqrt[4]{x}^3}dx \qquad dx=4\sqrt[4]{x}^3dt=4t^3dt$$

$$x=1 \quad \to \quad t=\sqrt[4]{1}=1 \qquad x=16 \quad \to \quad t=\sqrt[4]{16}=2$$

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int_1^2 \frac{4t^3dt}{t^2+t}=4\int_1^2 \frac{t^2\cdot \cancel{t}dt}{\cancel{t}(t+1)}=4\int_1^2 \frac{t^2dt}{t+1}=$$

$$4\int_1^2 \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=4\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right]_1^2=$$

$$\begin{array}{rl} t^2 & \underline{|t+1} \\ \underline{-t^2 - t} & t-1 \\ -t & \\ \underline{+t+1} & \\ +1 & \end{array}$$

$$=\left[2t^2-4t+4\ln(t+1)\right]_1^2=[(2\cdot 2^2-4\cdot 2+4\ln 3)-(2\cdot 1^2-4\cdot 1+4\ln 2)]=$$

$$=2+4\ln 3-4\ln 2=2+4\ln\tfrac{3}{2}$$

Ejercicio 3.- Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

Sea x el precio de un lápiz, y el de un rotulador y z el de una carpeta.

$$\begin{array}{rrrcl} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ 2x & +4y & +z & = & 20 \\ x & +7y & & = & 25 \end{array}$$

Discutimos el sistema para saber si tiene soluciónes. Llamemos C a la matriz de coeficientes del sistema y $|A|$ a la matriz ampliada. Calculamos el rango por determinantes.

$$|C|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}=(0+28+1)-(8+21+0)=0 \quad Rg(C)\leq 3$$

Dado que el menor formado por a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12-2\neq 0 \quad \to \quad Rg(C)=2.$

Sustituimos la tercera columna por la columna de términos independientes y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 2 & 4 & 20 \\ 1 & 7 & 25 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}=5\Big((60+42+4)-(12+84+10)\Big)=0 \quad Rg(A)\leq 3$$

Puesto que el $Rg(C)=2$ y el $Rg(A)\not< Rg(C)$, el $Rg(A)=2$ y el sistema es compatible indeterminado. No podemos deducir el precio de cada artículo pues no hay una solución única.

b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

La nueva ecuación es: $z = 10x$. El nuevo sistema es:

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ 2x & +4y & +z & = & 20 \\ 10x & & -z & = & 0 \end{array}$$

Resolvemos por Gauss.

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ 2x & +4y & +z & = & 20 \\ 10x & & -z & = & 0 \end{array} \xrightarrow[F_3=F_3-5F_2]{F_2=3F_2-2F_1} \begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ & +10y & -z & = & 30 \\ & -20y & -6z & = & -100 \end{array} \xrightarrow{F_3=F_3+2F_2}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +2z & = & 15 \\ & +10y & -z & = & 30 \\ & & -8z & = & -40 \end{array} \quad \rightarrow \quad z = 5 \quad y = \frac{30+5}{10} = 3,5 \quad x = \frac{15-3,5-2\cdot 5}{3} = 0,5$$

Solución: Lápiz: 0,50€ Rotulador: 3,50€ Carpeta: 5€

Ejercicio 4.- Considera los vectores $\overrightarrow{u} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{v} = (0,2,1)$ y $\overrightarrow{w} = (m,1,n)$

a) [1,25 puntos] Halla m y n sabiendo que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes y que $\overrightarrow{w}$ es ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

Si los vectores son linealmente dependientes su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 2n - 2m - 1 \quad \rightarrow \quad -2m + 2n - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad -2m + 2n = 1$$

Si $\overrightarrow{w}$ es ortogonal a $\overrightarrow{u}$ su producto escalar es nulo.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = (1,0,1) \cdot (m,1,n) = m + n \quad \rightarrow \quad m + n = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{array}{r} -2m + 2n = 1 \\ m + n = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad m = -n \quad \rightarrow \quad -2(-n) + 2n = 1 \quad \rightarrow \quad n = \frac{1}{4} \quad m = -\frac{1}{4}$$

b) [1.25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas.

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{w} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \left| 2 - (2m+1) \right| = \frac{1}{6} \left| 1 - 2m \right|$$

$$V = 10 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{6}|1 - 2m| = 10 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2m = 60 & \rightarrow \quad m = -\frac{59}{2} \\ 2m - 1 = 60 & \rightarrow \quad m = +\frac{61}{2} \end{cases}$$

Solución: $m = \frac{61}{2}$ o $m = -\frac{59}{2}$