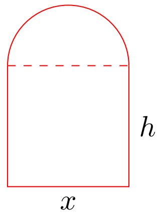
Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.

Si es posible, determine la base x para que el perímetro sea mínimo.



El radio del semicírculo es de $r = \frac{x}{2}$. La longitud de su arco es $l = 2\pi r = 2\pi \frac{x}{2} = \pi x$. Por tanto el perímetro total es: $P = x + 2h + \pi x$.

El área de la figura es suma del área de un rectángulo más la de un semicírculo:

$$A_t = xh + \frac{\pi(\frac{x}{2})^2}{2} = xh + \frac{\pi x^2}{8} \qquad A_t = 16 \quad \rightarrow \quad xh + \frac{\pi x^2}{8} = 16 \quad \rightarrow \quad h = \frac{16 - \frac{\pi x^2}{8}}{x} = \frac{16}{x} - \frac{\pi}{8}x$$

Obtenemos una expresión para el perímetro, (lados del rectángulo más media circunferencia), y derivamos para buscar posibles mínimos.

$$P = x + 2h + \frac{\cancel{2}\pi\frac{x}{2}}{\cancel{2}} = x + 2\left(\frac{16}{x} - \frac{\pi}{8}x\right) + \frac{\pi}{2}x = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x + \frac{32}{x} - \frac{\pi}{4}x = \left(1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{32}{x} =$$
$$= \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{32}{x}$$

$$P'(x) = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{32}{x^2}.$$

$$P'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{32}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4+\pi}{4} = \frac{32}{x^2} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$$

Comprobamos que el punto hayado es un mínimo con el criterio de la segunda derivada.

$$P''(x) = 0 + 0 - \frac{0 \cdot x^2 - 32 \cdot 2x}{x^4} = \frac{64}{x^3}$$

$P''\left(\sqrt{\frac{128}{4+\pi}}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad P\left(\sqrt{\frac{128}{4+\pi}}\right)$ es un mínimo.

Solución: $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

$y = x^2$ es una parábola centrada en el origen y que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$.

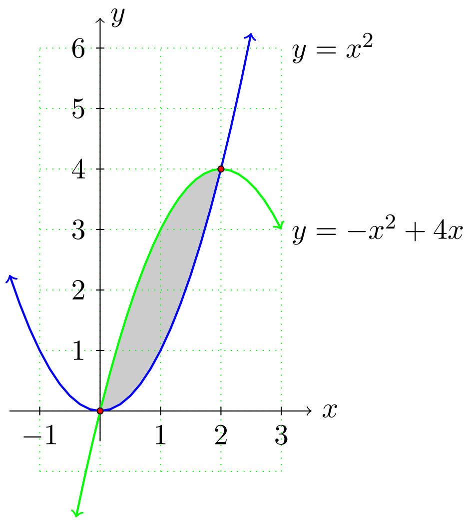
$y = -x^2 + 4x = x(4-x)$ es una parábola invertida que corta al eje x en $(0,0)$ y $(4,0)$.

Igualando sus funciones podemos obtener sus puntos de corte:

$x^2 = -x^2 + 4x \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

$x = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4$. Se cortan en $(0,0)$ y en $(2,4)$.

Representamos ambas gráficas:



b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.

$$A = \int_0^2 \left[(-x^2 + 4x) - (x^2)\right] dx$$

c) [1 punto] Calcula el área.

$$A = \int_0^2 \left[(-x^2 + 4x) - (x^2)\right] dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 2 \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}\ \mathrm{u}^2$$

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

$$A + \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

La matríz no tiene inversa cuando su determinante es cero.

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \Big((-2+\lambda)^2(1+\lambda) - 4(-2+\lambda)\Big) =$$

$$|A + \lambda I| = (\lambda - 2)\left[(\lambda-2)(\lambda+1) - 4\right] = (\lambda-2)(\lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 2 - 4) = (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$|A + \lambda I| = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3) \qquad |A + \lambda I| = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2; \quad \lambda = -2; \quad \lambda = 3$$

Solución: la matriz tiene inversa siempre que $\lambda \neq 2,\ \lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 3$

b) [1,5 puntos] Resuelve $AX = -3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x = 1$.

$$AX = -3X \quad \equiv \quad \begin{array}{rrl} -2x & -2y & = -3x \\ -2x & +y & = -3y \\ & -2z & = -3z \end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{rrl} x & -2y & = 0 \\ -2x & +4y & = 0 \\ & z & = 0 \end{array}$$

El sistema es homogeneo y por tanto tiene solución, (aun no sabemos si única o infinitas). Del sistema vemos que $z = 0$. Aplicamos Gauss a las 2 primeras ecuaciones.

$$\begin{array}{rrl} x & -2y & = 0 \\ -2x & +4y & = 0 \end{array} \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{array}{rrl} x & -2y & = 0 \\ \cancel{0x} & \cancel{+0y} & = \emptyset \end{array} \quad \rightarrow \quad x = 2y$$

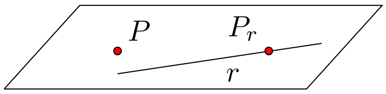
Por tanto el sistema es compatible indeterminado con solución: $(2\mu, \mu, 0)$.

Si $x = 1$, entonces $2\mu = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. Por tanto la solución es $x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = 0$.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.

Un plano viene determinado por un punto y 2 vectores. Podemos usar el punto P, el vector de la recta $\overrightarrow{v_r} = (3,0,1)$ y un segundo vector de origen P y extremo un punto de r, $(P_r(1,-2,0))$.



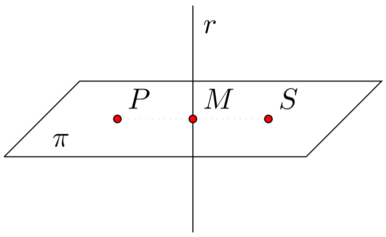
$\overrightarrow{PP_r} = (1,-2,0) - (1,-1,0) = (0,-1,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -3z - (-1(x-1)) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 3z - 1 = 0$$

Solución: $x - 3z - 1 = 0$

b) [1.25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Trazamos el plano π perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de π es el vector director de la recta.



$\overrightarrow{v_r} = (3,0,1) \qquad \pi \equiv 3x + z + D = 0$

Usamos el punto P para determinar D en el plano. $3 \cdot 1 + 0 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -3$

Por tanto, $\pi \equiv 3x + z - 3 = 0$.

Llamemos M a la intersección entre π y r, que es el punto medio entre P y su simétrico S. Calculamos esta intersección determinando t de la recta que satisface la ecuación del plano.

$$\pi \equiv 3x + z - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 3(1+3t) + t - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 10t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad M_x = 1 + 3 \cdot 0 = 1 \quad M_y = -2 \quad M_z = 0 \quad \rightarrow \quad M = (1,-2,0)$$

Puesto que M es el punto medio entre P y S, usamos la fórmula del punto medio para despejar las coordenadas de S.

$$(1,-2,0) = \left(\frac{S_x + 1}{2}, \frac{S_y - 1}{2}, \frac{S_z}{2} \right) \quad \rightarrow \quad S_x = 1 \quad S_y = -3 \quad S_z = 0$$

Simétrico: $(1,-3,0)$