Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.-
(2.5 puntos) Un distribuidor de software informático tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Ha de conseguir al menos 25 empresas como clientes y el número de clientes particulares deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Por razones de eficiencia del servicio postventa, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Cada empresa le produce 386€ de beneficio, mientras que cada particular le produce 229€. ¿Qué combinación de empresas y particulares le proporcionará el máximo beneficio? ¿A cuánto ascenderá ese beneficio?

Llamemos x a el número de clientes empresa e y a el número de clientes particulares. La función beneficio será: $B(x, y) = 386x + 229y$.

Las restricciones son: $x \geq 25, \quad y \geq 2x, \quad x + y \leq 120$.

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$x + y = 120$

x	y
0	120
120	0

$0 + 0 \leq 120$

$y = 2x$

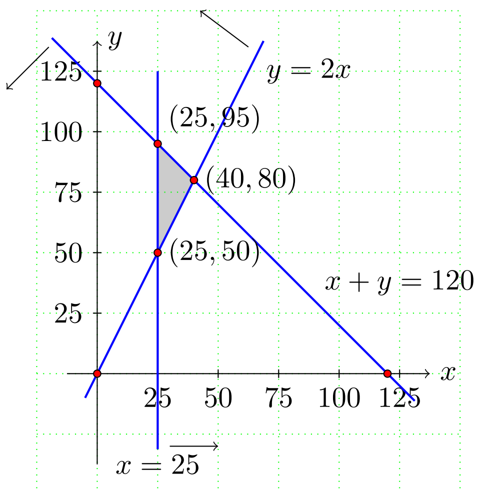
x	y
0	0
60	120

$0 \not\geq 2 \cdot 50$

$$\begin{cases} x = 25 \\ y = 2x \end{cases}$$
$y = 2 \cdot 25 = 50$

$$\begin{cases} x = 25 \\ x + y = 120 \end{cases}$$
$25 + y = 120$
$y = 95$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 120 \end{cases}$$
$x + 2x = 120$
$3x = 120$
$x = 40$
$y = 80$



Vértices: $(25, 50) \quad (40, 80) \quad (25, 95)$
Función objetivo: $B(x, y) = 386x + 229y$

$B(25, 50) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 50 = 21100$
$B(40, 80) = 386 \cdot 40 + 229 \cdot 80 = 33760$
$B(25, 95) = 386 \cdot 25 + 229 \cdot 95 = 31405$

Obtiene el máximo beneficio con 40 empresas y 80 particulares por un valor de 33760€ anuales.

Ejercicio 2.-
a) (1.5 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{e^{5x} - x}{x^2 - x} \qquad g(x) = (2x^2 - x)^3 \cdot \ln(x^3 + 2)$$

$$f'(x) = \frac{(5e^{5x} - 1)(x^2 - x) - (e^{5x} - x)(2x - 1)}{(x^2 - x)^2} =$$
$$f'(x) = \frac{x^2 5e^{5x} - xe^{5x} - x^2 + x - 2xe^{5x} + e^{5x} + 2x^2 - x}{(x^2 - x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)5e^{5x} + x^2}{(x^2 - x)^2}$$

Nota: Es posible que solo con la primera linea, sin reagrupar ni simplificar, (segunda y tercera lineas), fuese puntuado correctamente, pero no es seguro.

$$g'(x) = 3(2x^2 - x)^2(4x - 1) \cdot \ln(x^3 + 2) + (2x^2 - x)^3 \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

Nota: En este caso se puede factorizar $(2x^2 - x)^2$, (puedes intentarlo), pero la expresión obtenida no es más simple que está.

b) (1 punto) Determine la ecuación tangente a la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abcisa $x = 1$.

$$h'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad f'(1) = -\frac{1}{1} = -1 \qquad f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - 1 = -(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = -x + 2$$

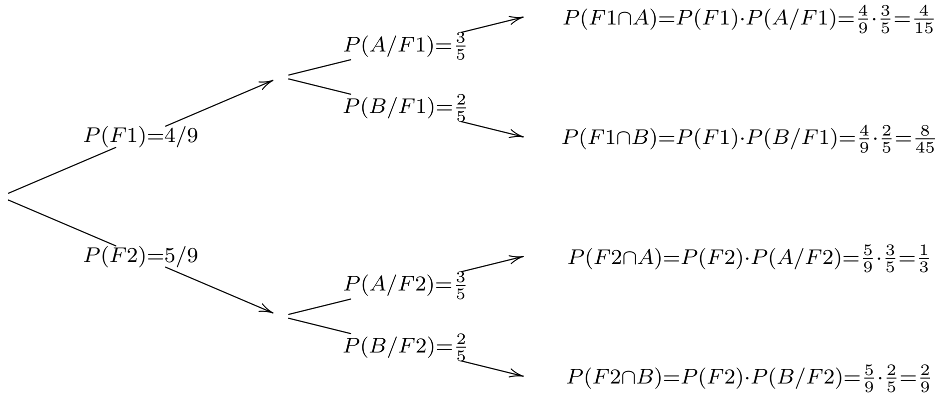
Ejercicio 3.- En una ciudad hay dos fábricas de pasta, F1 y F2, que producen dos tipos de productos, A y B, que venden a un distribuidor en paquetes de 1 kg. En un mes, la fábrica F1 produce 20000 kg de pasta, de los que 12000 son del tipo A y la fábrica F2 produce 25000 kg de pasta de los que 15000 kg son del tipo A. Se escoge al azar un paquete del distribuidor.

a) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

$$P(F1) = \frac{20000}{20000+25000} = \frac{4}{9} \qquad P(F2) = \frac{25000}{20000+25000} = \frac{5}{9}$$

$$P(A/F1) = \frac{12000}{20000} = \frac{3}{5} \qquad P(B/F1) = \frac{8000}{20000} = \frac{2}{5}$$

$$P(A/F2) = \frac{15000}{25000} = \frac{3}{5} \qquad P(B/F2) = \frac{10000}{25000} = \frac{2}{5}$$



$$P(B) = P(F1)\cdot P(B/F1) + P(F2)\cdot P(B/F2) = \frac{8}{45} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5}$$

b) (1 punto) Si el paquete elegido resulta ser del tipo A, ¿qué es más probable, que proceda de la fábrica F1 o que proceda de la F2?

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(F1/A) = \frac{P(F1\cap A)}{P(A)} = \frac{4/15}{3/5} = \frac{4}{9} \qquad P(F2/A) = \frac{P(F2\cap A)}{P(A)} = \frac{1/3}{3/5} = \frac{5}{9}$$

Es más probable que proceda de la fábrica F2.

Ejercicio 4.- La puntuación obtenida por los participantes en una prueba es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con una desviación típica de 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 64 participantes en esa prueba, resultando una puntuación media de 35 puntos.

a) (1.25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 95%, para la calificación media del total de participantes en la citada prueba.

Datos: $N(35,6)$ $\quad n=64 \quad \mu=35 \quad$ 95%.

$1-\alpha=0'95 \qquad \alpha=0'05 \qquad Z_{\alpha/2}=Z_{0'025}=Z_{0'975}=1'96$

$$I.C.=\left(\overline{x}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(35-1'96\frac{6}{\sqrt{64}},35+1'96\frac{6}{\sqrt{64}}\right)=(33'53,36'47)$$

b) (1.25 puntos) Halle el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la puntuación media del total de participantes, con un error inferior a 0.5 puntos y un nivel de confianza del 99%.

$1-\alpha=0'99 \qquad \alpha=0'01 \qquad Z_{\alpha/2}=Z_{0'005}=Z_{0'995}=2'575$

$$E=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad n=\left(Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2'575\cdot\frac{6}{0'5}\right)^2=954'81$$

Mínimo 955 participantes.