Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule la matriz A^{2017}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{\text{par}} = I \qquad A^{\text{impar}} = A \quad \rightarrow \quad A^{2017} = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) (1.5 puntos) ¿Se verifica la expresión $(B + A) \cdot (B - A) = B^2 - A^2$?

En general es falso, porque el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa. Comprobamos en este caso concreto.

$$(B + A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B - A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(B + A) \cdot (B - A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, por tanto, $(B + A) \cdot (B - A) \neq B^2 - A^2$ en este caso.

Ejercicio 2.- Sea $f(t)$ el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t, medido en meses, transcurrido desde su inauguración

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{5}{2}t^2 + 20t & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ \dfrac{90t-240}{t+4} & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) ¿Evoluciona la función f de forma continua?

$-\frac{5}{2}t^2 + 20t$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

La función $\dfrac{90t-240}{t+4}$ es continua excepto en $t = -4$, pero $-4 < 6$, por tanto es continua en su dominio.

Comprobamos si $f(t)$ es continua en $t = 6$.

$f(6) = -\frac{5}{2} \cdot 6^2 + 20 \cdot 6 = 30$

$$\lim_{t\to 6^-} f(t) = \lim_{t\to 6} \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right) = -\frac{5}{2} \cdot 6^2 + 20 \cdot 6 = 30$$
$$\lim_{t\to 6^+} f(t) = \lim_{t\to 6} \left(\frac{90t-240}{t+4}\right) = \frac{90 \cdot 6 - 240}{6+4} = 30$$

Por tanto, ya que $f(6) = \lim\limits_{t\to 6^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 6^+} f(t) = 30$, $f(t)$ es continua también en $t = 6$ y consecuentemente en todo su dominio.

b) (0.5 puntos) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?

Buscamos $f(t)$ a los 24 meses.

$$f(24) = \frac{90 \cdot 24 - 240}{24+4} \approx 68,57\%$$

c) (1 punto) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40%?

Planteamos $f(t) = 40$ en cada tramo.

$-\frac{5}{2}t^2 + 20t = 40 \quad \rightarrow \quad -5t^2 + 40t - 80 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 - 8t + 16 = 0$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2 \cdot 1} = 4$$

$$\frac{90t-240}{t+4} = 40 \quad \rightarrow \quad 90t - 240 = 40(t+4) \quad \rightarrow \quad 90t - 240 = 40t + 160 \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \quad 90t - 40t = 160 + 240 \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{400}{50} = 8$

El porcentaje sería del 40% a los 4 y 8 meses.

b) (0.5 puntos) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

Completo sería con una ocupación del 100%. Planteamos $f(t) = 100$ en cada tramo.

$-\frac{5}{2}t^2 + 20t = 100 \quad \rightarrow \quad -5t^2 + 40t - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 - 8t + 40 = 0$

$t = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 160}}{2 \cdot 1}$ Sin solución real.

$\dfrac{90t - 240}{t + 4} = 100 \quad \rightarrow \quad 90t - 240 = 100(t + 4) \quad \rightarrow \quad 90t - 240 = 100t + 400 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad 90t - 100t = 400 + 240 \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{640}{-10} = -64$ En nuestro caso t no está definido para valores negativos, por lo que no hay solución.

Solución: nunca llegaría a estar completo.

Nota: Otras formas. El primer tramo es una parábola invertida. Su máximo está en el vértice, en $(4, 40)$ si lo calculas, que no llega a 100. El segundo tramo es una función inversa, que el infinito, (haciendo el límite), tiene de valor 90 que tampoco llega. O calculando monotonía, (crecimiento y decrecimiento), mediante derivadas a la función y buscando sus máximos.

Ejercicio 3.- Se sabe que el 90% de los alumnos de un centro docente está interesado por las redes sociales, el 60% está interesado por sus notas y el 55% por ambas cuestiones. Se elige al azar un alumno de ese centro.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho alumno esté interesado por alguna de las 2 cuestiones?

$R \equiv$ estar interesado por las redes. $\quad N \equiv$ estar interesado por las notas.

$P(R) = 0,9 \quad P(N) = 0,6 \quad P(R \cap N) = 0,55$

Buscamos $P(R \cup N) = P(R) + P(N) - P(R \cap N) = 0,9 + 0,6 - 0,55 = 0,95 \equiv 95\%$

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que esté interesado por sus notas, sabiendo que no está interesado por las redes sociales.

$$P(N/\bar{R}) = \frac{P(N \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(N) - P(N \cap R)}{1 - P(R)} = \frac{0,6 - 0,55}{1 - 0,9} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5 \equiv 50\%$$

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que no esté interesado por ninguna de estas dos cuestiones.

$P(\overline{N \cup R}) = 1 - P(N \cup R) = 1 - 0,95 = 0,05 \equiv 5\%$

Ejercicio 4.- La altura de los estudiantes de 2º bachillerato de un centro sigue una ley Normal de media 165 cm y desviación típica 10 cm.

a) (1 punto) ¿Que distribución sigue la altura media de la muestras de tamaño 25?

$X \equiv N\left(165, \frac{10}{\sqrt{25}}\right) = N(165, 2)$

b) (1.5 puntos) Se elige al azar una muestra de 25 estudiantes y se les mide la altura. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de esa muestra supere 160 cm?

$$P(x > 160) = 1 - P(x < 160) = 1 - P\left(z < \frac{160 - 165}{2}\right) = 1 - P(z < -2,5) =$$

$$= 1 - P(z > 2,5) = 1 - [1 - P(z < 2,5)] = P(z < 2,5) = 0,9938$$