Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2e^{-x^2}$.

a) [0'75 puntos Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Asíntotas horizontales:

Nota: En funciones con exponenciales hay que estudiar el límite tanto a $+\infty$ como a $-\infty$, pues la asíntota por la izquierda y por la derecha pueden diferir.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2e^{-x^2}) = \infty \cdot e^{-(\pm\infty)^2} = \frac{\infty}{e^{\infty}} = \overset{IND}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]};$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^2e^{-x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}} = \overset{IND}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} \overset{L'Hospt}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}e^{x^2}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Asíntota horizontal en $y = 0$. Puesto que hay asíntota horizontal no puede haber oblícua.

Asíntotas verticales:

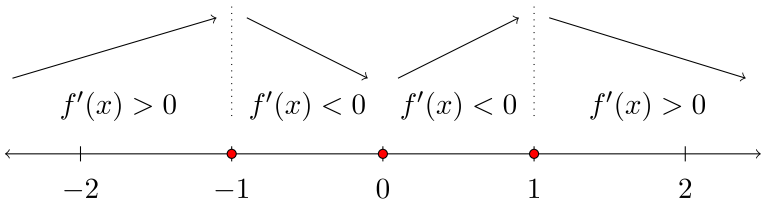
Para que exista asíntota vertical, $\lim_{x\to a}\frac{x^2}{e^{x^2}}$ tiene que ser infinito. Puesto que el denominador no puede anularse, ($e^{x^2} = 0$ no tiene soluciones), la función no tiene asíntotas verticales.

b) [1'25 puntos Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos, (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

$$f(x) = x^2e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}} \quad \to \quad f'(x) = \frac{2xe^{x^2} - x^2(2x)e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}} \quad \to \quad 2x - 2x^3 = 0 \quad \to \quad 2x(1 - x^2) = 0 \quad \to \quad x = 0; \quad x = \pm 1$$

Posibles extremos en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Función definida en $\mathbb{R}$. Comprobamos signo de la derivada en cada intervalo.



$f'(-2) = \dfrac{2(-2) - 2(-2)^3}{e^{(-2)^2}} > 0$

$f'(-0,5) = \dfrac{2(-0,5) - 2(-0,5)^3}{e^{(-0,5)^2}} < 0$

$f'(0,5) = \dfrac{2 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,5^3}{e^{0,5^2}} > 0$

$f'(2) = \dfrac{2 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3}{e^{2^2}} < 0$

f decrece en $(-1,0) \cup (1,\infty)$ $\qquad$ f crece en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

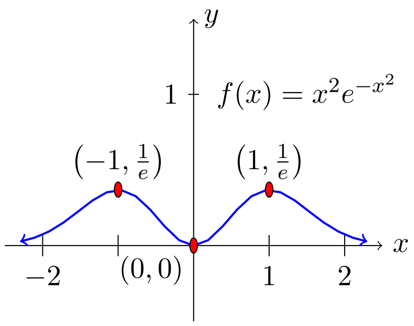
Hay máximos en $x = -1$ y $x = 1$.

$f(-1) = \dfrac{(-1)^2}{e^{(-1)^2}} = \dfrac{1}{e}$. Máximo con abcisa: $x = -1$ y valor: $\dfrac{1}{e}$

$f(1) = \dfrac{1^2}{e^{1^2}} = \dfrac{1}{e}$. Máximo con abcisa: $x = 1$ y valor: $\dfrac{1}{e}$

Hay un mínimo en $x = 0$. $f(0) = \dfrac{0^2}{e^{0^2}} = 0$ Abcisa: $x = 0$. Valor: 0

c) [0'5 puntos Esboza la gráfica de f.



Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Calcula $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$ Sugerencia: $t=\sqrt{x}$

$t=\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad x=t^2 \quad \rightarrow \quad dx=2tdt$

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t^2}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^3}{1+t}dt =$$

$$= 2\int \left(t^2-t+1+\frac{-1}{1+t}\right)dx =$$

$$= \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|1+t| + k_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + k$$

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{t^3} & & & t+1 \\ \cline{4-4} -\cancel{t^3} & -t^2 & & t^2-t+1 \\ \cline{1-2} & -\cancel{t^2} & & \\ & \cancel{t^2} & +t & \\ \cline{2-3} & & t & \\ & & -t & -1 \\ \cline{3-4} & & & -1 \end{array}$$

$$\text{Solución: } \int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + k$$

Ejercicio 3.- Considera $A=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcula el rango de $AB^T+\lambda I$ según los valores de λ, (B^T es la matriz traspuesta de B, I es la matriz identidad de orden 3).

$$AB^T+\lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$AB^T+\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante desarrollando tercera fila por menores para ver el rango.

Nota: También podríamos hacerlo por Sarrus y llegaríamos a la misma expresión.

$$|AB^T+\lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0+0+\lambda \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda+1)(\lambda-1)+1] =$$

$$= \lambda[(\lambda^2-1)+1] = \lambda^3 \qquad \lambda^3=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=0$$

Si $\lambda \neq 0 \quad \rightarrow \quad Rg(AB^T+\lambda I)=3$.

Si $\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad AB^T + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Puesto que F_1 y F_2 son proporcionales y F_3 es nula, si $\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad Rg(AB^T + \lambda I) = 1$.

b) [1.5 puntos] Calcula la matriz X que verifica que $CX - X = 2I$

Despejamos X en la ecuación.

$CX - X = 2I \quad \rightarrow \quad CX - IX = 2I \quad \rightarrow \quad (C-I)X = 2I \quad \rightarrow \quad \cancel{(C-I)^{-1}(C-I)}X = (C-I)^{-1}2I$

$$X = (C-I)^{-1}2I = 2(C-I)^{-1}$$

$C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$|C - I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 1) = -1$

$(C - I)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Adj(C - I)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(C - I)^{-1} = \dfrac{1}{|C - I|} Adj(C - I)^T = \dfrac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X = 2(C - I)^{-1} = 2 \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.- [2'5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones

$$x = y = z \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Sea r la primera recta y s la segunda.

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]\right|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}$$

$P_r = (0,0,0) \quad \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \qquad P_s = (1,3,0) \quad \overrightarrow{v_s} = (1,1,-1)$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (0,0,0) - (1,3,0) = (-1,-3,0)$

$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}] = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 0 - 3) - (0 - 1 + 3) = -4$

$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-i + j + k) - (i - j + k) = -2i + 2j \equiv (-2, 2, 0)$

$|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]\right|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{|-4|}{\sqrt{8}} = \sqrt{2} \text{ u}$$

Nota: Esto también puede hacerse determinando la posición relativa, donde veriamos que se cruzan, y calculando la perpendicular común a ambas rectas y sus puntos de corte. Por último calculariamos la distancia entre esos dos puntos llegando a la misma solución. Pero ese método es más largo, aunque igualmente válido.