Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)$ es finito, calcula m y el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{m}{0}\right)\overset{IND}{=}[\infty\pm\infty];$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-m(e^x-1)}{2x(e^x-1)}\right)=\overset{IND}{\left[\frac{0-0}{0}\right]}\overset{L'Hospt}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-me^x}{2(e^x-1)+2xe^x}\right)=$$

$$=\frac{2-m}{2(1-1)+0}=\frac{2-m}{0}$$

Dado que el límite es finito, tiene que ser del tipo $\frac{0}{0}\quad\rightarrow\quad 2-m=0\quad\rightarrow\quad m=2$

Resolvemos el límite:

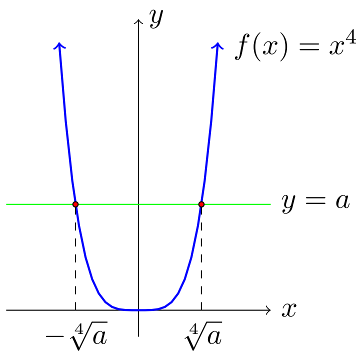
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-2(e^x-1)}{2x(e^x-1)}\right)\overset{L'Hospt}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2e^x}{2(e^x-1)+2xe^x}\right)=\frac{2-2}{2(1-1)+0}=\overset{IND}{\left[\frac{0}{0}\right]}$$

$$\overset{L'Hospt}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2e^x}{2e^x+2e^x+2xe^x}\right)=\frac{-2}{2+2+0}=-\frac{1}{2}$$

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de f formando con ella un recinto de área $\frac{8}{5}$.

Esbozamos las gráficas $y=x^4$, (similar a $y=x^2$) e $y=a$, (recta horizontal).

En las intersecciones de ambas gráficas $x^4=a\quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt[4]{a}$



Calculamos el área del recinto:

$$A=\int_{-\sqrt[4]{a}}^{\sqrt[4]{a}}(a-x^4)dx=2\int_0^{\sqrt[4]{a}}(a-x^4)dx=2\left[ax-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[4]{a}}=$$

$$=2\left[a\sqrt[4]{a}-\frac{\sqrt[4]{a}^5}{5}-0\right]=2\left[\sqrt[4]{a^5}-\frac{\sqrt[4]{a^5}}{5}\right]=$$

$$=2\sqrt[4]{a^5}\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{5}\sqrt[4]{a^5}$$

Puesto que $A=\frac{8}{5}\quad\rightarrow\quad\frac{8}{5}=\frac{8}{5}\sqrt[4]{a^5}\quad\rightarrow\quad\sqrt[4]{a^5}=1\quad\rightarrow\quad a=\sqrt[5]{1^4}=1$ Recta $y=1$.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rrrl} 2x & -4y & +2z & = 1 \\ 5x & -11y & +9z & = \lambda \\ x & -3y & +5z & = 2 \end{array}\right\}$$

a) [1.75 puntos] Discute el sistema según los valores de λ.

Denominemos C a la matriz de coeficientes del sistema y A a la matriz ampliada, (C junto con la matriz columna de términos independientes). Calculamos rangos mediante determinantes.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (-110 - 30 - 36) - (-22 - 54 - 100) = 0 \quad \rightarrow \quad Rg(C) < 3$$

Dado que el menor formado por $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} = -22 - (-20) \neq 0,\ Rg(C) = 2.$

Para estudiar el rango de A, sustituimos la columna C_3 de C por la C_4 de A.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-44 - 15 - 4\lambda) - (-11 - 40 - 6\lambda) = 2\lambda - 8 \qquad 2\lambda - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 4$$

$Rg(A)$ no puede ser inferior a $Rg(C)$, por lo que $Rg(A) \geq 2$.

Si $\lambda \neq 4 \quad \rightarrow \quad Rg(A) = 3 \neq Rg(C) = 2 \quad \rightarrow$ El sistema es incompatible.
Si $\lambda = 4 \quad \rightarrow \quad Rg(A) = 2 = Rg(C) = 2 \quad \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

b) [0.75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.

Descartamos la tercera ecuación, sustituimos λ y resolvemos, (usaremos t como parámetro).

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -4y & +2z & = 1 \\ 5x & -11y & +9z & = 4 \end{array}\right. \overset{z=t}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} 2x - 4y & = 1 - 2t \\ 5x - 11y & = 4 - 9t \end{array}\right. \xrightarrow{Ec_2 = 5Ec_1 - 2Ec_2} \left\{\begin{array}{rrl} 2x & -4y & = +1 - 2t \\ & 2y & = -3 + 8t \end{array}\right.$$

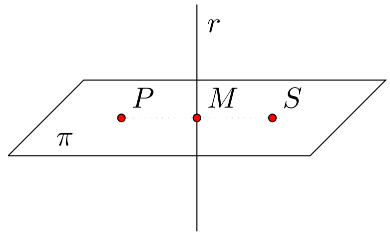
$$y = \frac{-3 + 8t}{2} \qquad x = \frac{1 - 2t + 4(\frac{-3+8t}{2})}{2} = \frac{-5 + 14t}{2}$$

$$\text{Solución:} \quad x = \frac{-5 + 14t}{2} \qquad y = \frac{-3 + 8t}{2} \qquad z = t.$$

Ejercicio 4.- Considera el punto $A(1,-1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a r.

Trazamos el plano π perpendicular a r que pasa por P. El vector normal de π es el vector director de la recta.



$\overrightarrow{v_r} = (2,-1,0) \qquad \pi \equiv 2x - y + D = 0$

Usamos el punto P para determinar D en el plano.

$$2\cdot 1 - (-1) + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -3$$

Por tanto, $\pi \equiv 2x - y - 3 = 0$.

Llamemos M a la intersección entre π y r, que es el punto medio entre P y su simétrico S. Calculamos esta intersección determinando t de la recta que satisface la ecuación del plano.

$$\pi \equiv 2x - y - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2(1+2\lambda) - (1-\lambda) - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 5\lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \tfrac{2}{5} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad M_x = 1 + 2\cdot\tfrac{2}{5} = \tfrac{9}{5} \quad M_y = 1 - \tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} \quad M_z = 1 \quad \rightarrow \quad M = (\tfrac{9}{5}, \tfrac{3}{5}, 1)$$

Puesto que M es el punto medio entre P y S, usamos la fórmula del punto medio para despejar las coordenadas de S.

$$\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) = \left(\frac{S_x+1}{2}, \frac{S_y-1}{2}, \frac{S_z+1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_x = \frac{13}{5} \quad S_y = \frac{11}{5} \quad S_z = 1$$

Simétrico: $(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1)$

b) [1 punto] Determina la ecuación del plano que contiene a r y pasa por A.

Usaremos el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r} = (2,-1,0)$, un punto de la recta, $P_r(1,1,1)$ y el vector $\overrightarrow{AP_r}$ para que contenga al punto A.

$\overrightarrow{AP_r} = (1,1,1) - (1,-1,1) = (0,2,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4(z-1) \quad \rightarrow \quad 4(z-1) = 0 \quad \rightarrow \quad z - 1 = 0$$

Solución: $z - 1 = 0$