Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f.

f está definida en $\mathbb{R}$, (si igualamos el denominador a 0, $x^2+1=0$, no encontramos soluciones), por lo que no hay asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=0 \quad\to\quad$ Asíntota horizontal en $y=0$. No hay asíntotas oblicuas.

Los puntos de corte entre asíntota y gráfica las obtenemos del sistema formado por la asíntota $y=0$ y la gráfica $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

$\dfrac{x}{x^2+1}=0 \quad\to\quad x=0 \quad f(0)=\dfrac{0}{0^2+1}=0 \quad\to\quad$ La asíntota se corta con la gráfica en $(0,0)$.

b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad\to\quad \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \quad\to\quad 1-x^2=0 \quad\to\quad x=\pm1$$

Investigamos el signo de la derivada en los intervalos $(-\infty,-1)\quad(-1,1)\quad(1,\infty)$.

$f'(-2)=\dfrac{1-(-2)^2}{((-2)^2+1)^2}<0 \quad\to\quad f(x)$ decrece en $(-\infty,-1)$.

$f'(0)=\dfrac{1-0^2}{(0^2+1)^2}>0 \quad\to\quad f(x)$ crece en $(-1,1)$.

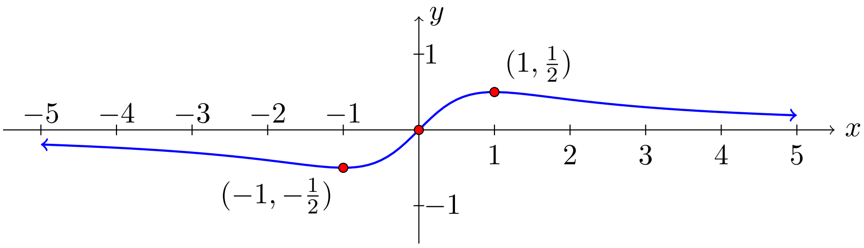
$f'(2)=\dfrac{1-2^2}{(2^2+1)^2}<0 \quad\to\quad f(x)$ decrece en $(1,\infty)$.

$f(x)$ tiene un mínimo en $x=-1$. Pasa de decrecer a crecer. $f(-1)=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ tiene un máximo en $x=1$. Pasa de crecer a decrecer. $f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$

Mínimo en $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$. Máximo en $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.



Ejercicio 2.- Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x)$ (ln representa logaritmo neperiano).

a) [0'5 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Recta tangente: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

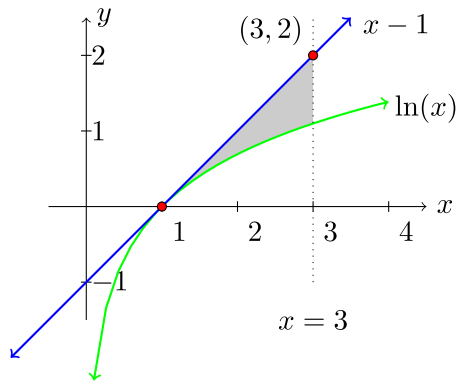
$f(1) = \ln 1 = 0 \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$y - 0 = 1(x - 1) \quad \to \quad y = x - 1$

Solución: $y = x - 1$

b) [2 puntos] Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f, la recta $y = x - 1$ y la recta $x = 3$. Calcula su área.

Para calcular el área podemos calcular el área del triángulo formado bajo la recta $y = x - 1$ y restarle el área bajo la curba $y = \ln(x)$.



$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot a}{2} = \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ u}^2 \quad a = f(3) = 3 - 1 = 2.$

$A_{\ln(x)} = \displaystyle\int_1^3 \ln(x)dx.$

La integral la realizaremos por partes.

$u = \ln(x) \quad du = \dfrac{1}{x}dx \quad dv = dx \quad v = x$

$$\int_1^3 \ln(x)dx = [x \ln x]_1^3 - \int_1^3 \left(\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) dx = [x \ln x - x]_1^3 = (3 \ln 3 - 3) - (1 \ln 1 - 1) = 3 \ln 3 - 2 \text{ u}^2$$

$A = A_{\text{triángulo}} - A_{\ln(x)} = 2 - (3\ln 3 - 2) = 4 - 3\ln 3 \text{ u}^2.$

Nota: También podría haberse hecho integrando asíntota menos logaritmo, $\int_1^3 (x - 1 - \ln x)dx$*, llegando al mismo resultado.*

Ejercicio 3.- Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{rcl} (3\alpha - 1)x + 2y & = & 5 - \alpha \\ \alpha x + y & = & 2 \\ 3\alpha x + 3y & = & \alpha + 5 \end{array}\right.$

a) [1'5 puntos] Discútelo según los valores del parámero α.

Sea C la matriz de coeficientes del sistema y A la matriz ampliada, discutimos rangos mediante determinantes.

$$C = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{vmatrix} =$$

$$= [(3\alpha - 1)(\alpha + 5) + 3\alpha(5 - \alpha) + 12\alpha] - [3\alpha(5 - \alpha) + 2\alpha(5 + \alpha) + 6(3\alpha - 1)] = \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$|A| = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (\alpha - 1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1$$

Puesto que el rango de la matriz de coeficientes C, matriz de dimensión 3×2, es máximo 2, cuando $\alpha \neq 1, Rg(A) = 3 \neq Rg(C)$ y el sistema es incompatible.

Con $\alpha = 1$, el sistema se convierte en $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 4 \\ x + y & = & 2 \\ 3x + 3y & = & 6 \end{array}\right.$

Las matrices asociadas a este sistema son $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Puesto que todas las filas son proporcionales, $Rg(C) = Rg(A) = 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

b) [1 punto] Resuélvelo para $\alpha = 1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x = 4$.

Ya hemos visto que para $\alpha = 1$, el sistema se convierte en $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 4 \\ x + y & = & 2 \\ 3x + 3y & = & 6 \end{array}\right.$.

Dado que las tres ecuaciones son proporcionales, podemos elimimar por ejemplo primera y tercera ecuación quedandonos con $x + y = 2$.

Si $x = \lambda$, $y = 2 - \lambda$. Solución al sistema: $(\lambda, 2 - \lambda)$

Con $x = 4,\ y = 2 - 4 = -2$

Ejercicio 4.- Considera las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

a) [1'5 puntos] Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

Ambas rectas pueden estar en el mismo plano siempre que no se crucen. Pasamos s a forma paramétrica para determinar su posición relativa designando $y = \mu$.

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\mu \\ y = \mu \\ z = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, -1, 0) \\ P_r(1, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (-2, 1, 0) \\ P_s(-1, 0, -1) \end{array}$$

Puesto que $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son proporcionales, $(\vec{v}_r = -\vec{v}_s)$, las rectas son o paralelas o coincidentes.

Para que sean coincidentes cada punto de r pertenecerá a s y viceversa. Entonces el punto $P_r(1, 1, 1)$ tendría que pertenecer a s. Planteamos si $P_r \in s$:

$$\begin{array}{l} 1 = -1 - 2\mu \\ 1 = \mu \\ 1 = -1 \end{array}$$

Este sistema no tiene soluciones. Por tanto r y s no son coincidentes y si son paralelas. Por tanto, son coplanarias.

Para hallar la ecuación del plano usaremos el haz de planos de la recta s con el punto de r : $P_r(1, 1, 1)$

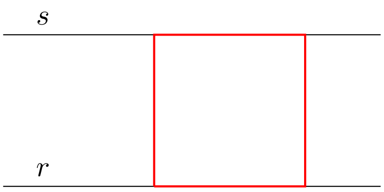
$$(x + 2y + 1) + \lambda(z + 1) = 0 \overset{P_r(1,1,1)}{\rightarrow} (1 + 2 \cdot 1 + 1) + \lambda(1 + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 4 + 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2$$

$$(x + 2y + 1) - 2(z + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Plano: } x + 2y - 2z - 1 = 0$$

Nota: También podriamos haber calculado el plano mediante el vector director de r o de s, otro vector dado por $\overrightarrow{P_rP_s}$ y un punto de una de las rectas, pero el método del haz es más corto.

b) [1 punto] Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas de r y s, calcula su área.

Cualquier cuadrado con lados en r y s tendrá como lado la distancia entre r y s. Al ser paralelas podemos calcular la distancia de $P_r(1,1,1)$ a la recta s.



$$d(P_r, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_s|}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,0,-1) - (1,1,1) = (-2,-1,-2)$$

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_rP_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-2i + 2k) - (4j - 2k) = -2i - 4j + 4k \equiv (-2,-4,4)$$

$$d(P_r, s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{|(-2,-4,4)|}{|(-2,1,0)|} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{5}}$$

$$A_{\square} = l^2 = \left(\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{36}{5}$$

Solución: $\frac{36}{5}$ u^2

Nota: Otra forma, ligeramente más larga pero igualmente válida, sería calcular la distancia buscando el plano perpendicular a una recta que pasa por un punto de la otra, determinando 2 puntos a mínima distancia y calculando la distancia entre ambos. A partir de dicha distancia calcularíamos el área del cuadrado.