Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sabiendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\,\mathrm{sen}(x) + x\cos(3x)}{x^2}$$

es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\,\mathrm{sen}(x) + x\cos(3x)}{x^2} = \frac{\ln 1 - a\,\mathrm{sen}\,0 + 0\cdot\cos 0}{0^2} = \overset{IND}{\left[\frac{0}{0}\right]} \overset{L'Hospt}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cos(x) + \cos(3x) + x\left(-\,\mathrm{sen}(3x)(3)\right)}{2x} = \frac{\frac{1}{0+1} - a\cos 0 + \cos 0 + 0\cdot(-3\,\mathrm{sen}\,0)}{2\cdot 0} = \frac{2-a}{0}$$

Para que el límite sea finito, $\frac{2-a}{0}$ tiene que ser una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por tanto:

$2 - a = 0 \quad \to \quad a = 2.$

Con $a = 2$, el límite es del tipo $\frac{0}{0}$. Volvemos a aplicar L'Hospital.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 2\cos(x) + \cos(3x) - 3x\,\mathrm{sen}(3x)}{2x} \overset{L'Hospt}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 2\,\mathrm{sen}(x) - 3\,\mathrm{sen}(3x) - 3[\mathrm{sen}(3x) + 3x\cos(3x)]}{2} = \frac{-1+0-0-3(0+0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 2.- [2.5 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x = 1$ sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x > -1$.

Datos: $f(0) = 0 \qquad f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{(x-1)^2}{x+1}\, dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\, dx \quad \text{Integral racional.}$$

$$f(x) = \int \left(x - 3 + \frac{4}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln|x+1| + k$$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -2x & +1 & x+1 \\ \hline -x^2 & -x & & x-3 \\ \hline & -3x & +1 & \\ & +3x & +3 & \\ \hline & & +4 & \end{array}$$

$$f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{0^2}{2} - 3\cdot 0 + 4\ln|0+1| + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 0$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln|x+1|$$

$$f(1) = \frac{1^2}{2} - 3 + 4\ln 2 = 4\ln 2 - \tfrac{5}{2} \qquad f'(1) = \frac{(1-1)^2}{1+1} = 0$$

Recta tangente: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \quad \rightarrow \quad y - \left(4\ln 2 - \frac{5}{2}\right) = 0(x-1) \quad \rightarrow \quad y = 4\ln 2 - \frac{5}{2}$

Solución: $y = 4\ln 2 - \frac{5}{2}$

Ejercicio 3.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

a) [1'75 puntos] Halla la matriz X que verifica $AX + B = 2A$

$$AX + B = 2A \quad \to \quad AX = 2A - B \quad \to \quad A^{-1}AX = A^{-1}(2A - B) \quad \to \quad X = A^{-1}(2A - B)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 + 0 + 0) - (-2 + 0 + 0) = 1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

b) [0'75 punto] Calcula B^2 y B^{2016}.

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B^{2016} = (B^2)^{1008} = I^{1008} = I$$

$$\text{Solución: } B^{2016} = I$$

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta r dada por $\left\{\begin{array}{r} y+2z=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

a) [1 punto] Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

Llamemos π al plano buscado. Si π es perpendicular a r, su vector normal es el director de r.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \vec{v}_r=(0,-2,1)$$

$\pi \equiv -2y+z+D=0$ Usando P determinamos D en el plano.

$-2\cdot 0+5+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-5$

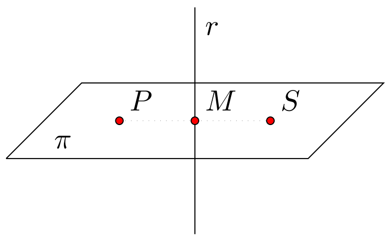
$\pi \equiv -2y+z-5=0$

Solución: $-2y+z-5=0$

b) [1'5 puntos] Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r.

Nota: La distancia puede calcularse con la fórmula $d(P,r)$, pero puesto que vamos a necesitar el punto medio para calcular el simétrico, lo haremos mediante la distancia entre 2 puntos.

Buscamos el punto M, que es el punto de r más cercano a P.
También es la intersección de π con r.



$\pi \cap r \quad \rightarrow \quad -2(-2\lambda)+\lambda-5=0 \quad \rightarrow \quad 5\lambda-5=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=1$

$M=r_{\{\lambda=1\}}=(1,-2,1)$

$d(P,r)=d(P,M)=\sqrt{(1-1)^2+(0-(-2))^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$

El punto simétrico S podemos calcularlo sabiendo que M es el punto medio entre P y S.

$$(1,-2,1)=\left(\frac{1+S_x}{2},\frac{0+S_y}{2},\frac{5+S_z}{2}\right) \quad \rightarrow \quad S_x=1 \quad S_y=-4 \quad S_z=-3$$

Soluciones: Distancia $2\sqrt{5}$ u. Simétrico: $(1,-4,-3)$