Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.-
a) [1.5 puntos] Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$2x - y \leq -2 \quad 4x - 2y \geq -10 \quad 5x - y \leq 4 \quad x \geq 0$$

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$2x - y = -2$

x	y
0	2
-1	0

$2 \cdot 0 - 0 \not\leq -2$

$4x - 2y = -10$

x	y
0	5
-2.5	0

$4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \geq -10$

$5x - y = 4$

x	y
0	-4
0.8	0

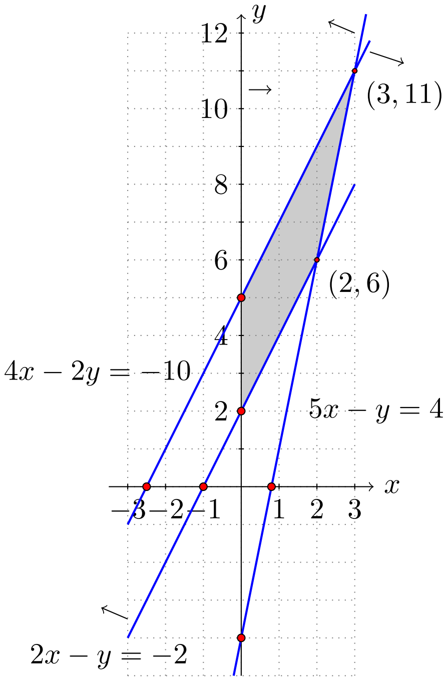
$5 \cdot 0 - 0 \leq 4$

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$$

$y = 2x + 2$
$5x - (2x + 2) = 4$
$3x = 6$
$x = 2 \quad y = 6$

$$\begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$$

$y = 5x - 4$
$4x - 2(5x - 4) = -10$
$-6x = -18$
$x = 3 \quad y = 11$



Vértices en $(0, 2)$, $(0, 5)$, $(2, 6)$ y $(3, 11)$

b) [1 punto] Calcule los valores extremos de la función $F(x, y) = 6x - 3y$, en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

$F(x, y) = 6x - 3y$
$F(0, 2) = 6 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6$
$F(0, 5) = 6 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = -15$
$F(2, 6) = 6 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = -6$
$F(3, 11) = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 11 = -15$

La función tiene máximo de -6 que se alcanza en todos los puntos del segmento dado entre $(0, 2)$ y $(2, 6)$.
La función tiene mínimo de -15 que se alcanza en todos los puntos del segmento dado entre $(0, 5)$ y $(3, 11)$.

Ejercicio 2.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + a & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) [1.3 puntos] Calcule el valor de a para que la función sea continua en $x = 2$. Para ese valor de a obtenido, ¿es derivable la función en $x = 2$?

Para que sea continua, $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$. Puesto que se trata de una función a trozos, habrá que hacer límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \dfrac{1}{2-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4x + a) = 2^2 - 4\cdot 2 + a = a - 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2-1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad a - 4 = 1 \quad \rightarrow \quad a = 5$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{0\cdot(x-1) - 1\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x-4) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(2-1)^2} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

Puesto que los límites laterales no coinciden, $(0 \neq -1)$, la función no es derivable en $x = 2$.

b) [1.2 puntos] Para $a = 4$, estudie la monotonía y calcule las ecuaciones de las asíntotas, si existen.

Hemos visto que la derivada no depende de a. Buscamos puntos críticos igualando la derivada a 0.

$2x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$. Pero sabemos por el apartado anterior que $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

$\dfrac{-1}{(x-1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -1 = 0\cdot(x-1)^2$. Sin solución real.

No hay puntos críticos. Analizamos el signo de la derivada en los intervalos de definición de cada tramo: $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = 2\cdot 0 - 4 < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ decrece en } (-\infty, 2) \\ f'(3) = \dfrac{-1}{(3-1)^2} < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ decrece en } (2, \infty) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$f(x)$ decrece en su dominio.
No hay extremos.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2-4x+4) = (-\infty)^2 - 4(-\infty) + 4 = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{\infty-1} = 0$$

Hay asíntota horizontal por la derecha en $y = 0$. Buscamos posible asíntota oblicua por la izquierda.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+4}{x} = \infty \quad \rightarrow \quad \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Asítotas verticales:

$x^2 - 4x + 4$ no tiene asíntotas verticales por ser polinómica.

$\dfrac{1}{x-1}$ tiene una posible asintota vertical en $x = 1$, pero puesto que está definido para $x \geq 2$ no tiene asíntotas verticales.

Por tanto, la única asíntota es horizontal por la derecha en $y = 0$.

Ejercicio 3.- El aparcamiento de una sala de conciertos está completo el 85% de los días. El 90% de los días que el aparcamiento está completo, la sala de conciertos está llena, y el 22% de los días que el aparcamiento no está completo, la sala de conciertos no está llena. Elegido un día a azar,
a) (1.5 puntos) ¿cuál es la probabilidad de que la sala de conciertos esté llena?

$C \equiv$ el aparcamiento está completo. $\quad P(C) = 0'85 \quad P(\bar{C}) = 0'15$
$S \equiv$ la sala está llena. $\quad P(S/C) = 0'90 \quad P(\bar{S}/C) = 0'10 \quad P(\bar{S}/\bar{C}) = 0'22$

Realizamos el diagrama en árbol.

$P(C) = 0'85$
- $P(S/C) = 0'90 \longrightarrow P(C \cap S) = P(C)\cdot P(S/C) = 0'85 \cdot 0'90 = 0'765$
- $P(\bar{S}/C) = 0'10 \longrightarrow P(C \cap \bar{S}) = P(C)\cdot P(\bar{S}/C) = 0'85 \cdot 0'10 = 0'085$

$P(\bar{C}) = 0'15$
- $P(S/\bar{C}) = 0'78 \longrightarrow P(\bar{C} \cap S) = P(\bar{C})\cdot P(S/\bar{C}) = 0'15 \cdot 0'78 = 0'117$
- $P(\bar{S}/\bar{C}) = 0'22 \longrightarrow P(\bar{C} \cap \bar{S}) = P(\bar{C})\cdot P(\bar{S}/\bar{C}) = 0'15 \cdot 0'22 = 0'033$

$$P(S) = P(C)\cdot P(S/C) + P(\bar{C})\cdot P(S/\bar{C}) = 0'765 + 0'117 = 0'882 \equiv 88'2\%$$

b) (1 punto) Si se sabe que la sala de conciertos está llena, ¿cuál es la probabilidad de que el aparcamiento esté completo?

Buscamos $P(C/S) = \dfrac{P(C \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0'765}{0'882} \approx 0'867 \equiv 86'7\%$

Ejercicio 4.-
a) (1.25 puntos) Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 46 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo hay 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar 375 personas del primer estrato.

En el primer estrato se han tomado $\dfrac{375}{7500} = \dfrac{1}{20}$.

En los siguientes intervalos se tomarán:
Segundo: $\dfrac{1}{20}$ de $8400 = 420$ personas.
Tercero: $\dfrac{1}{20}$ de $5700 = 285$ personas.
Cuarto: $\dfrac{1}{20}$ de $3000 = 150$ personas.

Tamaño de la muestra: $375 + 420 + 285 + 150 = 1230$ personas.

b) (1.25 puntos) Dada la población $\{2, 4, 6\}$ construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.

Nada nos indica si son muestras con o sin reposción. Suponemos con reposición.

Nota: También podrían ser sin reposición con lo que la varianza no sería la misma.

$\Omega = \{(2,2);\ (2,4);\ (2,6);\ (4,2);\ (4,4);\ (4,6);\ (6,2);\ (6,4);\ (6,6)\}$

Las medias de estas muestran son: $2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6$.

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+2+4+5+4+5+6}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{2^2+3^2+4^2+3^2+4^2+5^2+4^2+5^2+6^2}{9} - 4^2 = \frac{156}{9} - 16 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Solución: } \sigma^2 = \frac{4}{3}$$