Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. La letra normal son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) [1.7 puntos] Resuelva la ecuación matricial $A^2 \cdot X + C = 2B$.

$$A^2 \cdot X + C = 2B \quad \to \quad A^2 \cdot X = 2B - C \quad \to \quad \cancel{\left(A^2\right)^{-1} A^2} X = \left(A^2\right)^{-1}(2B - C)$$

$$X = \left(A^2\right)^{-1}(2B - C)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -7 - (-8) = 1$$

$$\left(A^2\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad Adj\left(A^2\right)^t = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left(A^2\right)^{-1} = \frac{Adj\left(A^2\right)^t}{|A^2|} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2B - C = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(A^2\right)^{-1}(2B - C) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & -33 & 58 \\ -16 & 9 & -16 \end{pmatrix}$$

b) [0.8 puntos] ¿Qué dimensiones deben tener la matrices P y Q para que las matrices $(B+C)\cdot P$ y $B \cdot Q \cdot C^t$ sean cuadradas?

$B + C$ tiene dimensión 2×3. Para que P pueda multiplicar por al derecha a $B + C$ tiene que tener dimensión $3 \times x$. Para que sea cuadrada x tiene que ser igual a 2.

Dimensión de P : 3×2.

Denominemos la dimensión de Q de $m \times n$. Dadas las dimensiónes de B y de C^t, la ecuación de dimensiones será:

$$(2 \times 3) \cdot (m \times n) \cdot (3 \times 2)$$

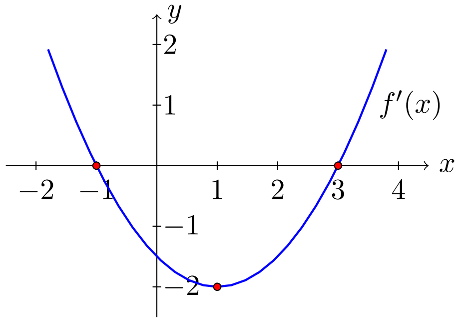
Esta ecuación implica que $m = 3$ y $n = 3$ y que el resultado sera de dimensión 2×2, (cuadrada).

Dimensión de Q : 3×3.

Ejercicio 2.- De una función continua y derivable, f, se sabe que la gráfica de la función derivada, f', es una parábola que pasa por los puntos $(-1,0)$, y $(3,0)$ y su vértice en el punto $(1,-2)$.

a) [1.5 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, así como la existencia de extremos.

Esbozamos la parábola.



Podemos ver que la función derivada es positiva en $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$. Asimismo es negativa en $(-1,3)$.

Por tanto, debido al signo de la derivada, la función:

Crece en $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$.
Decrece en $(-1,3)$

Tiene un máximo en $x=-1$, (pasa de crecer a decrecer).
Tiene un mínimo en $x=3$, (pasa de decrecer a crecer).

Nota: Han pedido determinar la existencia de extremos. No han pedido calcular sus abscisas.

b) [1 punto] Si $f(1)=2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=1$.

Ecuación de la recta tangente: $y-f(x_0)=m(x-x_0)$.

En $x=1$, $f(1)=2$ y $f'(1)=-2$, (pues la función derivada pasa por $(1,-2)$ según el enunciado). Por tanto la recta tangente es:

$$y-2=-2(x-1) \quad\equiv\quad y=-2x+4$$

Ejercicio 3.- Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.6, \quad P(A^c \cap B^c) = 0.28$$

a) [1 punto] Halle la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez.

Buscamos $P(A \cup B)$.

Por las leyes de Morgan sabemos que: $P(A^c \cap B^c) = P\Big((A \cup B)^c\Big)$.

Por tanto $P\Big((A \cup B)^c\Big) = P(A^c \cap B^c) = 0.28$

$P(A \cup B) = 1 - P\Big((A \cup B)^c\Big) = 1 - 0.28 = 0.72$

b) [1 punto] Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B.

Buscamos $P(A/\bar{B}) = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.3 + 0.6 - 0.72 = 0.18$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.18 = 0.12$

$P(A/\bar{B}) = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{0.12}{0.4} = 0.3$

c) [0.5 puntos] ¿Son A y B independientes?

Son independientes si $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$

Puesto que $P(A \cap B) = 0.18$, si son independientes.

Ejercicio 4.- Una cadena de hipermercados decide estudiar la proporción de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en su envoltorio. Para ello, selecciona aleatoriamente 2000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.
a) [1.5 puntos] Determine un intervalo, al 95% de confianza, para la proporción real de artículos con este tipo de defecto e interprete el resultado obtenido.

Datos: $p = \dfrac{19}{2000}$ $\quad n = 2000 \quad 1-\alpha = 0'95 \quad \alpha = 0'05 \quad Z_{\alpha/2} = Z_{0'025} = Z_{0'975} = 1'96$

$$I.C. = \left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}, p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \left(\frac{19}{2000} - 1'96\sqrt{\frac{\frac{19}{2000}\cdot\frac{1981}{2000}}{2000}}, \frac{19}{2000} + 1'96\sqrt{\frac{\frac{19}{2000}\cdot\frac{1981}{2000}}{2000}}\right)$$

$$I.C. = (0'00525, 0'01375)$$

$0'00525 \cdot 2000 = 10.5 \approx 11 \qquad 0'01375 \cdot 2000 = 27.5 \approx 28$

A un nivel de confianza del 95%, encontraremos entre 11 y 28 artículos con envoltorio defectuoso por cada 2000 artículos.

b) [1 punto] ¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1%?

Datos: $p = \dfrac{19}{2000}$ $\quad E = 0'01 \quad 1-\alpha = 0'99 \quad \alpha = 0'01 \quad Z_{\alpha/2} = Z_{0'005} = Z_{0'995} = 2'575$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad \rightarrow \quad n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot pq = \left(\frac{2'575}{0'01}\right)^2 \cdot \frac{19}{2000}\cdot\frac{1981}{2000} \approx 623'9$$

Mínimo 624 artículos.