Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- a) (2.5 puntos) Un taller fabrica y vende dos tipos de alfombras, de seda y de lana. Para la elaboración de una unidad se necesita un trabajo manual de 2 horas para el primer tipo y 3 horas para el segundo y de un trabajo de máquina de 2 horas para el primer tipo y de 1 hora para el segundo. Por cuestiones laborales y de planificación, se dispone de hasta 600 horas al mes para el trabajo manual y de hasta 480 horas al mes para el destinado a la máquina.
Si el beneficio por unidad para cada tipo de alfombra es de 150€ y 100€ respectivamente, ¿cuántas alfombras de cada tipo debe elaborar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende el mismo?

Llamemos x a el número de alfombras de seda e y a el número de alfombras de lana. Hacemos una tabla con los datos y extraemos las inecuaciones del sistema.

	x	y	Totales
Horas manuales	2	3	600
Horas máquina	2	1	480

$2x + 3y \leq 600$
$2x + y \leq 480$
$x \geq 0 \qquad y \geq 0$

Calculamos puntos para cada recta e intersecciones y representamos la región.

$2x + 3y = 600$

x	y
0	200
300	0

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 600$

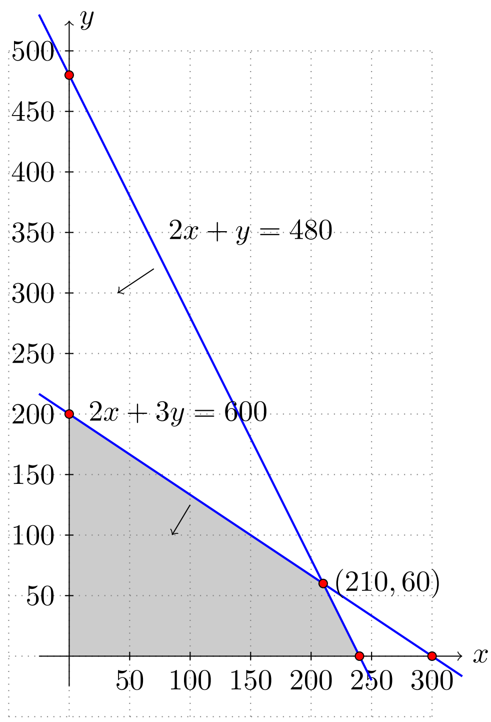
$2x + y = 480$

x	y
0	480
240	0

$2 \cdot 0 + 0 \leq 480$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 3y = 600 \\ (-)(2x + y = 480) \\ \hline 2y = 120 \end{array}\right.$$

$y = 60 \quad x = 210$



Vértices:
$(0, 0) \quad (240, 0) \quad (210, 60) \quad (0, 200)$
Función objetivo:
$f(x, y) = 150x + 100y$

$f(0, 0) = 150 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0$
$f(240, 0) = 150 \cdot 240 + 100 \cdot 0 = 36.000$
$f(210, 60) = 150 \cdot 210 + 100 \cdot 60 = 37.500$
$f(0, 200) = 150 \cdot 0 + 100 \cdot 200 = 20.000$

Hay que fabricar 210 alfombras de seda y 60 alfombras de lana. El beneficio asciende a 37.500€.

Ejercicio 2.- La cantidad, C, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, x, según la función

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{150+5x}{100} & \text{si} \quad 10 \leq x \leq 50 \\ \dfrac{200+10x}{25+3x} & \text{si} \quad x > 50 \end{cases}$$

donde C y x están expresadas en miles de euros.

a) (1 punto) Justifique que C es una función continua.

$\dfrac{150+5x}{100} = \frac{1}{100}(150+5x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$\dfrac{200+10x}{25+3x}$ es continua en $\mathbb{R}$ excepto donde $25+3x=0$ o $x=-\frac{25}{3}$, pero como no está definida en esta abscisa, $(-\frac{25}{3} \not> 50)$, está definida en su dominio.

Falta comprobar si es continua en $x = 50$.

$$C(50) = \frac{150+5\cdot 50}{100} = 4$$

$$\lim_{x\to 50^-} C(x) = \lim_{x\to 50} \frac{150+5x}{100} = \frac{150+5\cdot 50}{100} = 4$$

$$\lim_{x\to 50^+} C(x) = \lim_{x\to 50} \frac{200+10x}{25+3x} = \frac{200+10\cdot 50}{25+3\cdot 50} = 4$$

Puesto que $C(50) = \lim\limits_{x\to 50^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 50^+} C(x) = 4$, $C(x)$ es también continua en $x = 50$ y por tanto continua en todo su dominio.

b) (1 punto) ¿A partir de qué liquidez decrece la cantidad dedicada a créditos?¿Cuál es el valor máximo de C?

Estudiamos la monotonía.

$$\left(\frac{200+10x}{25+3x}\right)' = \frac{10(25+3x)-3(200+10x)}{(25+3x)^2} = \frac{-350}{(25+3x)^2}$$

$$C'(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{100} & \text{si} \quad 10 < x < 50 \\ \dfrac{-350}{(25+3x)^2} = & \text{si} \quad x > 50 \end{cases}$$

$C(x)$ crece en el intervalo $[10, 50]$, (su derivada es positiva en este intervalo), y decrece si $x > 50$, (su derivada es negativa, dado que está formada por un numerador negativo y un denominador siempre positivo por ser cuadrático).

Por tanto la cantidad dedicada a créditos decrece a partir de una liquidez de 50.000€.

El valor máximo de C es $C(50) = \dfrac{150 + 5 \cdot 50}{100} = 4$, lo que representa una cantidad de 4.000€.

c) (0.5 puntos) Calcule la asíntota horizontal e interprétela en el contexto del problema.

Puesto que la función no está definida con $x \to -\infty$, no tiene sentido hablar de asíntota por la izquierda. Buscamos asíntota cuando $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{200 + 10x}{25 + 3x} \overset{IND}{=} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{10}{3} \approx 3'33$$

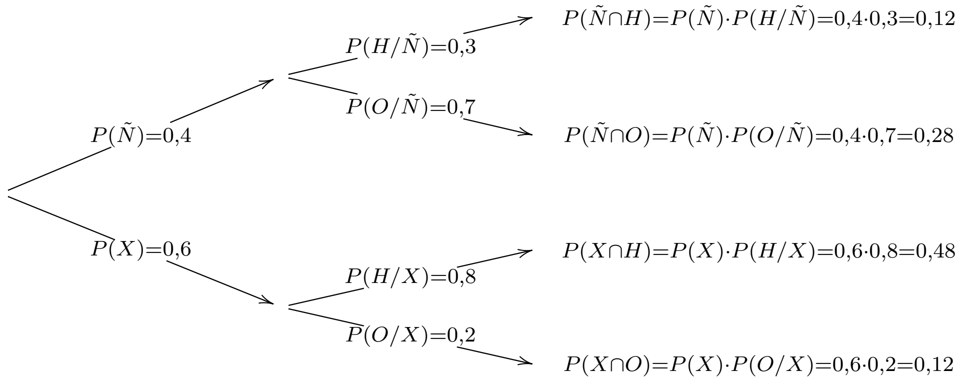
Existe una asíntota horizontal por la izquierda en $C = \dfrac{10}{3}$.
Puesto que sabemos que con $x > 50$, $C(x)$ decrece, esto quiere decir que la cantidad dedicada a créditos no será inferior a 3.333,33€ por mucho que aumente la liquidez.

Ejercicio 3.- En una encuesta sobre la nacionalidad de los veraneantes en un municipio de la costa andaluza, se ha observado que el 40% de los encuestados son españoles y el 60% extranjeros, que el 30% de los españoles y el 80% de los extranjeros residen en un hotel y el resto en otro tipo de residencia. Se elige al azar un veraneante del municipio.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que no resida en un hotel?

Sea $\tilde{N} \equiv$ ser expañol. $\quad X \equiv$ ser extranjero. $\quad H \equiv$ en hoteles. $\quad O \equiv$ otros tipos.

$P(\tilde{N}) = 0,4 \qquad P(X) = 0,6 \qquad P(H/\tilde{N}) = 0,3 \qquad P(H/X) = 0,8$



$$P(\bar{H}) = P(O) = P(\tilde{N}) \cdot P(O/\tilde{N}) + P(X) \cdot P(O/X) = 0,28 + 0,12 = 0,4 \equiv 40\%$$

Nota: Aunque no es obligatorio, puesto que nos han dado los datos en porcentaje les damos las respuestas también en porcentaje.

b) (1 punto) Si no reside en un hotel, ¿cuál es la probabilidad de que sea español?

Buscamos $P(\tilde{N}/\overline{H}) = P(\tilde{N}/O) = \dfrac{P(\tilde{N} \cap O)}{P(O)} = \dfrac{0,28}{0,4} = 0,7 \equiv 70\%$.

c) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "ser extranjero" y "residir en un hotel"?

Si son independientes $P(X \cap H) = P(X) \cdot P(H)$

$P(H) = 1 - P(O) = 1 - 0,4 = 0,6$

$$\left.\begin{array}{l} P(X \cap H) = 0,48 \\ P(X) \cdot P(H) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad P(X \cap H) \neq P(X) \cdot P(H). \text{ No son independientes.}$$

Ejercicio 4.- El peso de los habitantes de una determinada ciudad sigue una ley Normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg.
a) (0.75 puntos) ¿Qué distribución sigue la media de los pesos muestrales de habitantes de tamaño 64 extraidas de esa ciudad?

$$X \equiv N\left(65, \frac{8}{\sqrt{64}}\right) = N(64, 1)$$

b) (1.75 puntos) Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 100 de esa ciudad, ¿cúal es la probabilidad de que el peso medio de esa muestra esté comprendido entre 64 y 65 kg?

$$X \equiv N\left(65, \frac{8}{\sqrt{100}}\right) = N\left(64, \tfrac{4}{5}\right)$$

$$P(64 < X < 65) = P\left(\frac{64-65}{\frac{4}{5}} < Z < \frac{65-65}{\frac{4}{5}}\right) = P(-1'25 < Z < 0) =$$

$$= P(Z < 1'25) - P(Z < 0) = 0'8944 - 0'5 = 0'3944$$