Nota: Las notas en azul son aclaratorias y no son necesarias en el examen. El resto del texto son justificaciones que si deben ir en el examen, ya sean estas mismas u otras equivalentes.

Ejercicio 1.- Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1, A_2 y A_3 en dos comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}$.

Cati desea comprar 2 unidades de artículo A_1, 1 de A_2 y 3 de A_3.

Manuel desea comprar 5 unidades de artículo A_1, 1 de A_2 y 1 de A_3.

Han dispuesto esas compras en la matriz Q : $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1.8 puntos) Calcule $P \cdot Q^t$ y $Q \cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de la matrices resultantes.

$$P \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 160 \\ 122 & 157 \end{pmatrix}$$

El elemento $a_{11} = 115$ representa lo que pagaría Cati por su compra en el primer comercio.
El $a_{12} = 160$ representa los que pagaría Manuel en el primer comercio.
El $a_{21} = 122$ representa los que pagaría Cati en el segundo comercio.
El $a_{22} = 157$ representa los que pagaría Manuel en el segundo comercio.

$$Q \cdot P^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 20 & 25 \\ 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 122 \\ 160 & 157 \end{pmatrix}$$

El elemento $a_{11} = 115$ representa lo que pagaría Cati por su compra en el primer comercio.
El $a_{12} = 122$ representa los que pagaría Cati en el segundo comercio.
El $a_{21} = 160$ representa los que pagaría Manuel en el primer comercio.
El $a_{22} = 157$ representa los que pagaría Manuel en el segundo comercio.

b) (0.7 puntos) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, ¿dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

A Cati le intersa más hacer la compra en el primer comercio, (115€ frente a 122). En cambio a Manuel le interesa más comprar en el segundo, (157€ frente a 160 del primero).

Ejercicio 2.-
a) (1.2 puntos) Calcule los valores de a y de b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{2-x} & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en el punto de abscisa $x = 1$.

$\dfrac{b}{2-x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$. Pero puesto que $x = 2$ no pertenece a su dominio, (donde $x \leq 1$), es continua en su dominio.

$ax^2 - 3x + 1$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

Comprobamos si $f(x)$ es continua en $x = 1$.

$f(1) = \dfrac{b}{2-1} = b$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{b}{2-x} = b$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2 - 3x + 1) = a - 3 + 1 = a - 2$

Para que f sea continua, $b = a - 2$

$$\left(\frac{b}{2-x}\right)' = \frac{0 \cdot (2-x) - b \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{b}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ 2ax - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{b}{(2-x)^2} = \dfrac{b}{(2-1)^2} = b$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2ax - 3) = 2a - 3$

Para que f sea derivable, $b = 2a - 3$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} b = a - 2 \\ b = 2a - 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad a - 2 = 2a - 3 \quad \rightarrow \quad 1 = a \quad \rightarrow \quad b = -1$

b) (1.3 puntos) Para $a = 1$ y $b = 2$, estudie su monotonía y determine las ecuaciones de sus asíntotas, si existen.

Con $a = 1$ y $b = 2$ la función se convierte en $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Su función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Planteamos $f'(x) = 0$ para encontrar puntos críticos.

$\dfrac{2}{(2-x)^2} = 0$ no tiene solución.

$2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos creados con $x = 1$, (por cambio en la función a trozos), y $x = \frac{3}{2}$, (por punto crítico). $(-\infty, 1)$ $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

$f'(0) = \dfrac{2}{(2-0)^2} > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ crece en $(-\infty, 1)$.
$f'(1'1) = 2 \cdot 1'1 - 3 < 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ decrece en $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.
$f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ crece en $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Nota: No han pedido extremos así que no los he buscado. Algunos profesores defienden que habría que incluirlos por prudencia, yo creo que no por tiempo. Solo una aclaración por parte del organismo que evalua los exámenes podría aclararlo.

Asíntotas: Empiezo con horizontales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{2-x} = 0$ Hay asíntota horizontal en $y = 0$ por la izquierda. No hay oblicua por la izquierda.

No hay asíntotas horizontal ni oblícua por la derecha por tratarse de una función polinómica, (cuyos límites en el infinito siempre son infinitos).

Asíntotas verticales: hay una posible asíntota vertical en $x = 2$ en el trozo racional de la función, pero al no estar $x = 2$ en el dominio de dicho trozo, no hay asíntotas verticales.

Ejercicio 3.- Marta tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro de color azul y dos pares blancos. Si decide aleatoriamente qué ponerse, determine las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) (0.8 puntos) Llevar traje rojo y zapatos blancos.

Sean $TR \equiv$ el suceso llevar traje rojo, $TA \equiv$ llevarlo azul y TB llevarlo blanco.
Sean $ZR \equiv$ el suceso llevar zapatos rojos, $ZA \equiv$ llevarlos azules y ZB llevarlos blancos.

$P(TR) = \frac{2}{4} \quad P(TA) = \frac{1}{4} \quad P(TB) = \frac{1}{4} \quad P(ZR) = \frac{2}{5} \quad P(ZA) = \frac{1}{5} \quad P(ZB) = \frac{2}{5}$

Buscamos $P(TR \cap ZB)$. Ambas probabilidades son independientes. Por tanto:

$P(TR \cap ZB) = P(TR) \cdot P(ZB) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

b) (0.9 puntos) No ir toda vestida de blanco.

No ir toda vestida de blanco es lo contrario de ir toda vestida de blanco.

$P(\overline{TB \cap ZB}) = 1 - P(TB \cap ZB) = 1 - P(TB) \cdot P(ZB) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

c) (0.8 puntos) Calzar zapatos azules o blancos.

Buscamos $P(ZA \cup ZB) = P(ZA) + P(ZB) - P(ZA \cap ZB)$

Puesto que no se pueden llevar al mismo tiempo zapatos azules y blancos, los sucesos son incompatibles. Por tanto, $P(ZA \cap ZB) = 0$

$P(ZA \cup ZB) = P(ZA) + P(ZB) - P(ZA \cap ZB) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - 0 = \frac{3}{5}$

Ejercicio 4.- Se desea estimar la media de una variable aleatoria Normal cuya desviación típica es 2.5. Para ellos, se toma una muestra aleatoria, obteniéndose los siguientes datos:

18 18.5 14 16.5 19 20 20.5 17 18.5 18

a) (1 punto) Determine un intervalo de confianza al 96% para la media poblacional.

$$\overline{x} = \frac{18 + 18.5 + 14 + 16.5 + 19 + 20 + 20.5 + 17 + 18.5 + 18}{10} = 18$$

$1 - \alpha = 0'96 \qquad \alpha = 0'04 \qquad Z_{\alpha/2} = |Z_{0'02}| = Z_{0'98} = 2'055 \qquad \sigma = 2'5$

$$I.C. = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(18 - 2'055\frac{2'5}{\sqrt{10}}, 18 + 2'055\frac{2'5}{\sqrt{10}}\right) = (16'38, 19'62)$$

b) (0.5 puntos) ¿Cuál es el error máximo cometido con esa estimación?

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'055\frac{2'5}{\sqrt{10}} = 1'62$$

c) (1 punto) Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error maximo sea inferior a 1, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \to \quad n = \left(Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2'055 \cdot \frac{2'5}{1}\right)^2 \approx 26'4$$

Tamaño muestral mínimo: 27 datos.